

Everton Granemann Souza

CARACTERIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS ATRAVÉS DE GRÁFICOS DE RECORRÊNCIA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes

Curitiba

2008

... *Somos o que pensamos. Tudo o que
somos surge com nossos pensamentos.
Com nossos pensamentos, fazemos o
nosso mundo.*

Siddhārtha Gautama

Agradecimentos

- Aos meus pais pela educação e a confiança que sempre depositaram sobre mim;
- Ao meu orientador Sergio Roberto Lopes pela orientação, discussões e principalmente pela paciência;
- A minha namorada Thaís por estar ao meu lado nestes últimos anos;
- Aos professores Marcus Werner Beims, Ricardo Luiz Viana e Elbert E. Nehrer Macau pelas sugestões;
- A professora Lucimara S. Roman pelas sugestões;
- A Norbert Marwan pelo programa *CRP-toolbox* ;
- Ao professor Carlos de Carvalho pelo suporte computacional;
- Aos meus amigos e colegas de pós-graduação;
- Ao aluno Cristiano Francisco Woellner pelas nossas longas discussões teóricas, filosóficas e políticas das quais sempre surgiram idéias proveitosas;
- Aos alunos Jiusandro Kühn e Rodrigo Frehse Pereira pelas discussões.
- A CAPES pelo apoio financeiro;

Resumo

Nesse trabalho, caracterizamos diversos sistemas dinâmicos através de Gráficos de Recorrência, bem como, suas limitações e ferramentas. Trabalhando com uma dessas ferramentas, as *Medidas de Quantificação de Recorrência*, foram possíveis identificar transições do tipo hipercaos \rightarrow caos em sistemas acoplados com muitos graus de liberdade como: a rede de mapas de Bernoulli acoplados e a rede de circuitos de Chua acoplados, transição a qual, foi um dos principais resultados desse trabalho. Ainda trabalhando na interface dessa transição, as *Medidas de Quantificação de Recorrência* foram capazes de identificar comportamentos intermitentes.

Como segundo grande resultado, as *Medidas de Quantificação de Recorrência* revelaram-se ótimas ferramentas no tratamento de séries temporais não estacionárias, ou seja, séries cujos parâmetros variam de forma totalmente aleatória e desconhecida, possibilitando aplicações a séries experimentais, ainda que estas sejam ruidosas.

Contudo, buscamos sempre manter a conexão entre as *Medidas de Quantificação de Recorrência* com ferramentas já conhecidas da teoria de sistemas dinâmicos como: diagramas de bifurcação, expoentes de Lyapunov e entropias através de sistemas simples como: o mapa logístico e o mapa de Bernoulli [1], [2], [3]. Isso potencializa essas medidas como um mecanismo extra para a análise de sistemas dinâmicos.

Palavras chaves: Gráfico de Recorrência (*Recurrence Plots*), tempo de recorrência de Poincaré, imersão, séries temporais e não estacionariedade.

Abstract

In this work, we characterize several dynamical systems with Recurrence Plots as well its limitations and tools. Using one of its tools, *Recurrence Quantification Analysis*, we can identify hyperchaos \rightarrow chaos transition in coupled systems with many degrees of liberty like: a coupled lattices of Bernoulli maps and coupled lattice of Chua circuits, transition which were one of the most results of this work. Still working in the interface of its transition, the *Recurrence Quantification Analysis* were able to identify behavior of intermittent motion.

Like a second great result, the *Recurrence Quantification Analysis* reveals good tools to treat non-stationary temporal series, that is to say, in other words, temporal series whose parameters change randomly and unknown, allowing the application of its measures to experimental series and noise experimental series.

However, we always try to keep the connection between the *Recurrence Quantification Analysis* and known tools of theory of dynamical systems like: bifurcation diagrams, Lyapunov exponents and entropies through simple systems as: logistic map and Bernoulli map [1], [2], [3]. What gives for these measures, a power how an extra mechanism of dynamical systems analysis.

Key words: Recurrence Plot, recurrence time of Poincaré, immersion, temporal series and non-stationarity.

Sumário

Sumário	iv
1 Introdução	1
2 Fundamentos Básicos	5
2.1 Sistemas dinâmicos	5
2.2 Sistemas dinâmicos a tempo contínuo - Fluxos	5
2.3 Sistemas dinâmicos a tempo discreto - Mapas	7
2.4 Parâmetro de controle	8
2.5 Espaço de fase	8
2.6 Teoremas de Imersão	9
2.7 Idéia da Recorrência	16
2.8 Gráficos de Recorrência	21
2.8.1 Categorias de Gráficos de Recorrência	22
2.8.2 Escolha apropriada da dimensão de imersão (<i>embedding dimension</i>) .	26
2.8.3 Escolha do tempo de retardo (<i>delay</i>)	29
2.8.4 Raio da vizinhança (<i>threshold</i>)	31
2.8.5 Janela de Theiler (<i>Theiler window</i>)	33
2.9 Medidas de Quantificação	34
2.10 Detecção de estacionariedade	39
2.10.1 Janela móvel e Sobreposição (<i>Overlap</i>)	39
2.11 Sincronização de Caos	40
2.12 Espectro de Lyapunov a tempo infinito	44
2.12.1 Mapas unidimensionais	44
2.12.2 Estabilidade do Hiperplano de sincronização	46
2.13 Tipos de Acoplamentos	47
2.13.1 Redes de Mapas Acoplados	47
2.13.2 Redes de EDO Acopladas	49

2.14	<i>Softwares</i> utilizados	50
3	Gráficos de recorrência para mapas e seus resultados	51
3.1	Aplicações para mapas unidimensionais	51
3.1.1	O Mapa Logístico	51
3.1.2	O Mapa de Bernoulli	58
3.2	Aplicações para mapas acoplados multidimensionais	63
3.2.1	Rede de mapas de Bernoulli acoplados e a transição: Hipercaos \rightarrow Caos \rightarrow Hipercaos	64
3.2.2	Intermitência	72
3.2.3	Testando estacionariedade	75
4	Gráficos de recorrência para fluxos e seus Resultados	78
4.1	O circuito de Chua	78
4.2	Aplicações para fluxos acoplados multidimensionais	80
4.2.1	Circuito de Chua acoplado e a transição: Hipercaos \rightarrow Caos \rightarrow Hipercaos	80
5	Conclusão	85
	Apêndices	86
A		87
A.1	O que é uma variedade (<i>manifold?</i>)	87
B		90
B.1	Dedução do Teorema de Cauchy-Schwarz	90
C		92
C.1	Difeomorfismo e Homeomorfismo	92
	Referências Bibliográficas	92

Capítulo 1

Introdução

A origem da teoria de sistemas dinâmicos coincide com a origem da Mecânica Clássica, um ramo da Física que geralmente trata do movimento de corpos macromoleculares deslocando-se com velocidades pequenas, se comparadas à velocidade da luz [4].

O embrião dessa teoria, começa com Aristóteles (384-322 a.C.), discípulo de Platão (427-347 a.C) e tutor de Alexandre, o Grande (356-323 a.C.). Considerado um dos maiores filósofos clássicos e um dos responsáveis pela estruturação da cultura ocidental, Aristóteles fez várias contribuições em diversas áreas do conhecimento com publicações em: Biologia, Economia, Estética, Ética, Física, Metafísica, Poética, Política, Psicologia e Retórica. Talvez sua principal contribuição tenha sido a formulação de uma base para o pensamento lógico: uma coleção de regras metodológicas que ajudam e cuidam do “bem pensar”, ou do “pensar correto”, para qualquer que seja a utilidade desse pensamento, seja em um discurso, em uma fala, etc.

A filosofia de Aristóteles é a chamada “indutiva e dedutiva” apoiada em “verdades evidentes”, indo de hipóteses a conclusões. Embora muitas vezes incorretas, suas teorias são historicamente tão importantes quanto as futuras versões corrigidas, pois suas leis do movimento para os corpos serviram como base para C. Ptolomeu (\pm 85-165) propôr seu modelo geocêntrico, que por sua vez, motivou N. Copérnico (1473-1543) a consolidar o modelo proposto atualmente, o heliocêntrico.

Baseado no modelo heliocêntrico de Copérnico, e nas observações de um astrônomo muito famoso na época, T. Brahe (1546-1601), J. Kepler formulou três leis, utilizadas até hoje, para a chamada “Mecânica Celeste”. A contribuição de Kepler foi a última contribuição para a Física com caráter puramente cinemático, isto é, sem levar em consideração as forças que governam os movimentos. Nesta mesma época, um contemporâneo de Kepler, Galileu Galilei (1564-1642) adotou um abordagem inédita: “o método científico”. A partir de Galileu, qualquer procedimento experimental deveria estar totalmente de acordo com a

base-teórica e vice-versa. Baseado nisso, Galileu introduziu os conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas dos movimentos. Foi o pioneiro no uso do telescópio para estudos dos corpos celestes. Antecipou a lei da inércia, ao perceber que a ação de uma força é necessária apenas para mudar o movimento de um corpo, mas não para mantê-lo deslocando-se em linha reta e com velocidade constante, sobre um plano horizontal sem atrito. Também notou que a força que age sobre um corpo é proporcional à sua aceleração, e não à velocidade, como Aristóteles sugerira, cerca de 2.000 anos antes. Propôs também que corpos com massas distintas, na ausência da resistência do ar, caem com a mesma aceleração gravitacional g . Enfim, essa infinidade de resultados, experimentos e descobertas de Galileu, certamente serviram como base e ponto de partida para a Teoria de Sistemas Dinâmicos.

No ano em que Galileu falece, nasce I. Newton (1642-1727). Motivado por 22 questões que o próprio Newton havia elaborado, concebeu o cálculo diferencial integral; propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo; deduziu a lei da gravitação universal, a partir das leis de Kepler do movimento planetário, sendo o primeiro a considerar que a gravidade não atua apenas no mundo sub-lunar, como defendiam os aristotélicos, mas estende-se por todo o espaço. Seu livro de 511 páginas, em três volumes, foi considerado a maior contribuição à ciência feita por um só homem. Fez trabalhos sobre séries binomiais; realizou experiências com prismas, observando a composição da luz branca; propôs que a luz é de natureza corpuscular e descobriu sua polarização; construiu o primeiro telescópio refletor (baseado em espelhos e não em lentes, a fim de evitar a aberração cromática).

Ou seja, Newton mostrou como obter modelos matemáticos para descrever processos físicos que são, em essência, conseqüências de um conjunto de leis. Em uma frase escrita por P.S. Laplace (retirado da referência [5]) em 1812, visualizamos a pretensão científica daquela época. Segundo ele: Se alguma inteligência pudesse conhecer a posição \vec{x} e a velocidade \vec{v} de cada partícula do Universo num dado instante t , assim como a massa e a força que age sobre cada uma dessas partículas, então essa inteligência poderia prever o futuro do Universo para o resto do tempo. Seus seguidores esperavam que pudessem prever o comportamento de qualquer sistema complexo, identificando suas partes e estudando suas interações. No entanto, as leis de Newton só descrevem um problema de “ n ” corpos, ou seja, “ n ” esferas homogêneas em um espaço tridimensional, quando esses corpos estão sujeitos a apenas atrações gravitacionais mútuas. Tendo esse problema em vista, gerações seguintes de Físicos e Matemáticos tentaram explicar o método de Newton para o problema de três corpos (por exemplo: a Terra (M_2), a Lua (m) e o Sol (M_1)). Esse problema, porém, revelou-se insolúvel, no sentido de que não se consegue resolver, analiticamente e de forma exata, as equações que regem os movimentos desses corpos. O sonho determinista de Laplace se desfez parcial-

mente, entre o final do século *XIX* e o início do século *XX*, por duas razões: a elaboração da Mecânica Quântica e o aprofundamento nos estudos de equações diferenciais não-lineares. A primeira revelou que não se pode medir certas grandezas com precisão infinita, devido à elaboração do princípio da incerteza; a segunda mostrou que erros em medidas podem invalidar a previsão de equações, quando tais medidas, ligeiramente imprecisas, são usadas como condições iniciais das equações que representam a evolução temporal da grandeza em questão.

Em 1886 o rei Oscar II, da Suécia e da Noruega, na festa de seu aniversário de 60 anos, propõem um prêmio para quem desse uma prova rigorosa a respeito da estabilidade (ou não) do sistema solar. O ganhador desse prêmio foi J. H. Poincaré (1854-1912), o qual reduziu o sistema solar a um sistema de três corpos, e assim, provou (embora parcialmente) que esse problema é insolúvel, no sentido determinista proposto por Laplace, ou seja, é impossível encontrar uma fórmula analítica exata que descreva o movimento de m , a partir de uma posição inicial qualquer.

Para efetuar essa prova, Poincaré desenvolveu um texto com quase 300 páginas, no qual desenvolveu vários teoremas. Sendo um deles, o teorema da recorrência de Poincaré (vide seção 2.7). Baseado no teorema da recorrência de Poincaré, em 1987, Eckmann et. al. [6] desenvolveram uma ferramenta chamada Gráfico de Recorrência, utilizada hoje em dia (inclusive nesse trabalho) para revelar propriedades dinâmicas de sistemas tanto estacionários quanto não-estacionários. Normalmente aplica-se o Gráfico de Recorrência a uma série temporal de um sistema dinâmico. Com isso em vista, geramos séries temporais caracterizando diversos sistemas Físicos.

No capítulo 2, tratamos alguns fundamentos básicos necessários para a compreensão do Gráfico de Recorrência e suas medidas de quantificação de recorrência, que são medidas baseadas nas estruturas diagonais e verticais formadas pelo Gráfico de Recorrência, como: a dimensão de imersão e os teoremas associados à ela (como o teorema de Takens) e a recorrência de Poincaré. Também discutimos técnicas para estimar os parâmetros de imersão: como o método dos falsos vizinhos, que estima a dimensão de imersão, o método da informação mútua média, que estima o tempo de retardo, entre outros parâmetros poucos discutidos na literatura. Além disso, explanamos algumas ferramentas já conhecidas de dinâmica não-linear, como o expoente de Lyapunov em conjunto com tópicos recentes da teoria de sistemas dinâmicos como: sistemas acoplados e sincronização.

No capítulo 3, abordamos a aplicação e os resultados do Gráfico de Recorrência em mapas unidimensionais como: o mapa logístico e o mapa de Bernoulli, discutindo as medidas de quantificação de recorrência e as transições detectadas em função dos respectivos mapas. Também empregamos essas medidas de quantificação a uma rede de mapas de Ber-

noulli acoplados, e através dela, discutimos a inédita transição caos-hipercaos através do uso da recorrência. Diferente de outras ferramentas da teoria de sistemas dinâmicos, conseguimos mostrar que a transição caos-hipercaos era robusta se aplicada, tanto para séries estacionárias, quanto para séries não-estacionárias, sugerindo que as medidas de quantificação de recorrência podem ser empregadas à séries experimentais (séries não-estacionárias).

De forma similar, no capítulo 4, faremos o mesmo tratamento utilizado no capítulo 3, no entanto, fazendo uso de fluxos e fluxos acoplados, que nesse caso são representados pelo circuito de Chua e por uma rede de circuitos de Chua acoplados, ao invés de mapas. Para esse tipo de rede também conseguimos detectar a transição caos-hipercaos utilizando recorrência, transição a qual, corroboramos através do cálculo dos expoentes de Lyapunov dessa rede. Para o circuito de Chua, mostramos como as medidas de quantificação de recorrência podem detectar *crises*, que para esse tipo de sistema, geram a fusão de dois atratores caóticos em apenas um.

Finalmente, no capítulo 5 faremos as conclusões finais e indicações para os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos Básicos

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos utilizados na construção dessa dissertação. Durante o texto relacionamos apenas tópicos julgados como necessários, cuidando ao máximo possível não exceder a discussão. Contudo, alguns tópicos considerados mais elaborados foram adicionados aos apêndices.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser definido como um modelo matemático determinístico, uma regra (normalmente representada por uma equação), através da qual evoluímos uma variável¹ desse suposto sistema dinâmico em função do tempo. Nesse caso, o tempo pode ser caracterizado como uma variável contínua ou discreta [1]. Para o caso do tempo (representado por t) ser uma variável contínua, o sistema será representado por meio de uma equação diferencial, os chamados *fluxos*. Já quando for discreto, o sistema será denominado um *mapa*.

2.2 Sistemas dinâmicos a tempo contínuo - Fluxos

Como havíamos mencionado, os fluxos são sistemas dinâmicos representados por equações diferenciais, logo, a evolução do sistema é obtida através da integração dessas equações. Isso nos fornecerá uma solução para todos instantes de tempo, isto é, o tempo pode variar num intervalo infinitesimal. Um bom exemplo de um sistema contínuo é o sistema de Lorenz, dado pelas equações diferenciais abaixo:

¹Podemos imaginar esta variável como a posição de uma partícula, por exemplo.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y; \\
\frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y; \\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz;
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde x , y e z são variáveis de estados, σ , b e r são parâmetros de controle.

Se integrarmos as equações 2.1 podemos visualizar a evolução temporal de cada variável de estado sobre seus respectivos eixos cartesianos. Essa evolução temporal, para sistemas dissipativos como o sistema de Lorenz, fornece a imagem do atrator de Lorenz², ilustrado na figura 2.1.

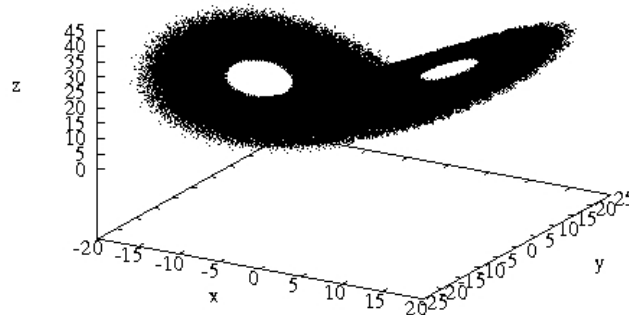


Figura 2.1: Representação do atrator de Lorenz sobre os eixos cartesianos.

²Um atrator caótico pode ser pensado como um subconjunto do espaço de fases com dinâmica caótica, para o qual o sistema converge, ou seja, um estado assintótico desse sistema. É lá que grande parte das trajetórias permanecerão infinitamente caso não percam sua estabilidade.

2.3 Sistemas dinâmicos a tempo discreto - Mapas

No caso de sistemas discretos, como o próprio nome sugere, o tempo é uma variável discreta, ou seja, a equação neste caso é uma equação de diferença (um mapa) a qual fornece somente informações de um estado presente n em função de um estado passado $n - 1$, contudo, nada pode ser afirmado sobre os estados intermediários entre esses pontos. Um exemplo típico de um sistema discreto é o mapa logístico, popularizado por May em seu grande trabalho de 1978 [7]:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.2)$$

onde r é o parâmetro controle, n é o índice temporal e x é a variável de posição do sistema.

Em nossos cálculos trabalharemos tanto com *mapas* quanto com *fluxos*. Caso desejemos uma visão comparativa, um sistema contínuo pode ser aproximado a um sistema discreto. Na figura 2.2 podemos ver a discrepância de um campo vetorial contínuo em relação a um campo vetorial discreto para linhas de campo aparentemente equivalentes. Note, que a figura da direita (fluxo) possui um campo vetorial preenchido em todos os intervalos de tempo abrangidos por sua solução, ao passo que o campo vetorial discreto possui “lacunas” entre suas soluções.

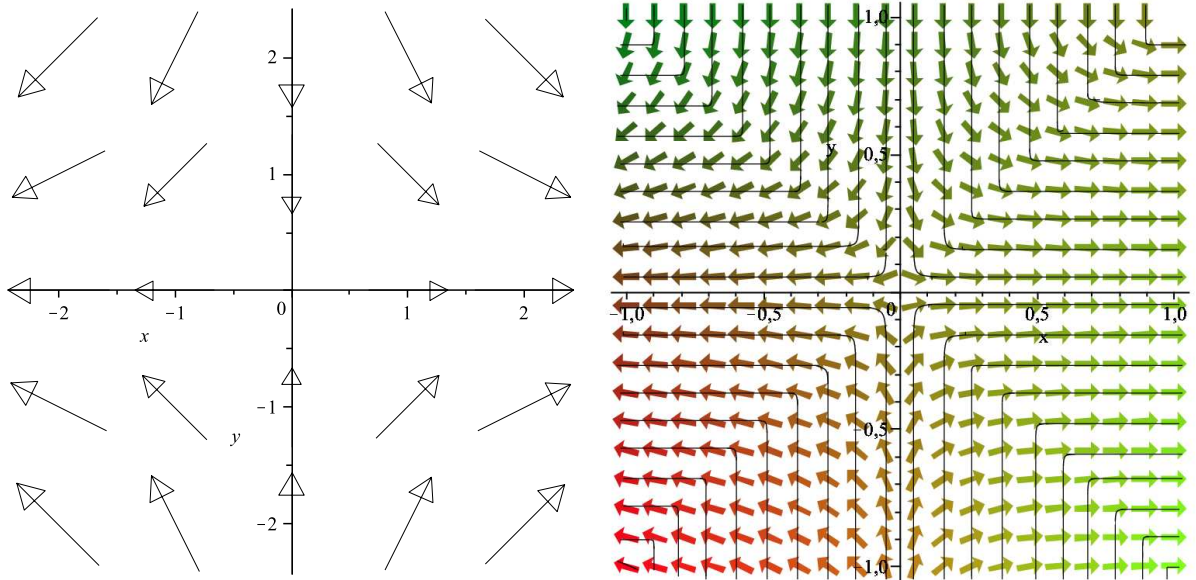


Figura 2.2: Esquerda, campo vetorial discreto regido pelas equações de diferença: $\frac{y}{\sqrt{x+y+20}}$ e $\frac{-y}{\sqrt{x+y+20}}$. À Direita, campo vetorial contínuo resultante das equações diferenciais de Lotka-Volterra: $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - y(t))$ e $\frac{dy(t)}{dt} = y(t)(1 - x(t))$.

2.4 Parâmetro de controle

Observe que tanto nas equações 2.1 quanto na equação 2.2 mencionamos o termo: “parâmetro de controle”. Os parâmetros de controle são grandezas que não evoluem no tempo, porém alterações em seus valores geram mudanças no comportamento do sistema em questão. No estudo de sistemas dinâmicos pretendemos conhecer não somente o comportamento do sistema na evolução do tempo, mas principalmente conhecer a dependência deste sistema sob variações dos parâmetros de controle. Em geral, elege-se somente um parâmetro de controle, como é o caso de r no mapa logístico (equação 2.2). Outro parâmetro que também utilizaremos com frequência é o parâmetro de acoplamento ϵ , que controla a força com que os elementos de uma rede se acoplam. Em alguns casos, quando o sistema possui mais de um parâmetro de controle, também é possível variá-los simultaneamente, todavia o controle da dinâmica do sistema torna-se muito mais complicado. [8].

2.5 Espaço de fase

Nesse momento faz-se necessário a compreensão de dois conceitos fundamentais de dinâmica não-linear, são eles: “o espaço de fase” e “o tempo de recorrência”. O espaço de fase pode ser considerado como um espaço abstrato onde se representa o comportamento de um sistema, e cujas dimensões são as variáveis desse sistema. Os pontos que sucessivamente especificam o estado desse sistema dependem da sua função iterativa e das condições iniciais (que darão o ponto de partida).

Devido a nossa limitação visual, somos restritos a visualizar representações, no máximo, tri-dimensionais. Caso analisemos sistemas acima dessa dimensão, somos forçados a utilizar a análise baseada em projeções.³ A figura 2.3 mostra o exemplo da projeção de um sistema amortecido em duas dimensões. Aproveitamos o ensejo para adiantar que essa será uma das grandes vantagens do gráfico de recorrência em relação a outras técnicas de dinâmica não-linear, pois ele permite uma análise multidimensional sem que haja necessidade de visualizar o espaço de fases através de projeções, contudo, esse tópico será discutido com mais cuidado nas seções relacionadas aos parâmetros necessários para construção dos gráficos de recorrência. Para construirmos um gráfico de recorrência precisamos sempre de uma (ou mais) série temporal, seja ela gerada por um experimento ou por simulações numéricas realizadas em um computador. Se optarmos pelo uso do computador, necessitaremos de um

³Projeção é um operador linear que transforma um sistema de “ n ” dimensões em “ $n - 1$ ” dimensões. Com isso podemos visualizar sobre eixos de um espaço vetorial (ex: espaço euclidiano) propriedades de um sistema muitas vezes inobserváveis a “ n ” dimensões.

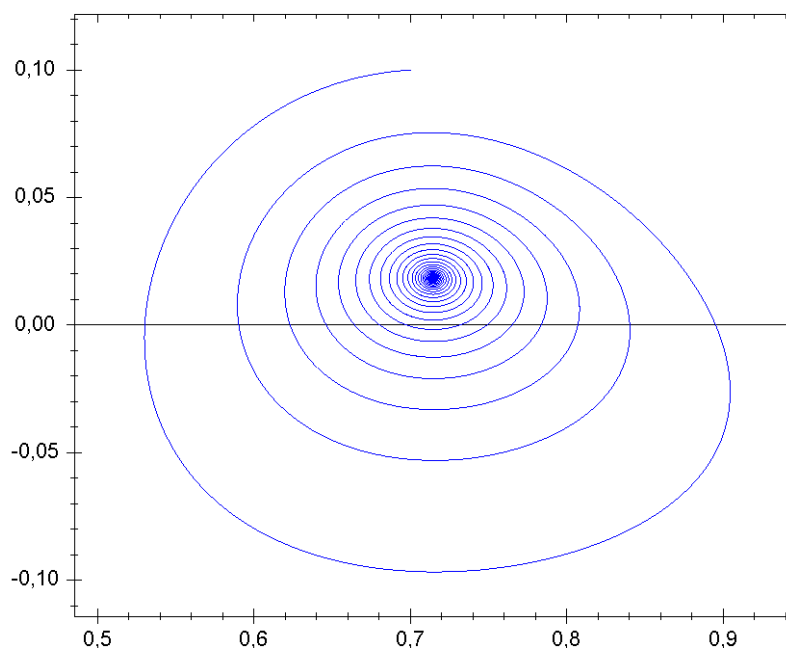


Figura 2.3: Representação do espaço de fases de um sistema dinâmico.

programa que gere essas séries, podendo ser, por exemplo, a posição de uma partícula em vários instantes de tempo. Já no caso do experimento, um eletrocardiograma poderá vir a ser a nossa referência. Eis aí que surge um problema. Como reconstruir um espaço de fase vetorial a partir de uma série temporal composta por termos escalares? A resposta para essa pergunta começou com Whitney em 1936, através dos seus teoremas de imersão (os artigos originais podem ser obtidos através das referências [9], [10] e de uma forma mais simplificada na referência [11]). Eles provam matematicamente que algumas classes de variedades diferenciáveis d -dimensionais contidos no espaço euclidiano podem ser imersas em uma dimensão de imersão m se respeitarem a relação $m > 2d$). Utilizando-se desses teoremas, Takens em (1981) [12] ampliou o resultado de Whitney criando as “coordenadas de retardo”, possibilitando a partir daí, a reconstrução de um atrator com medidas escalares. Mais tarde, em 1993, Sauer et al. [13] generalizou a técnica de Takens para uma gama maior de sistemas dinâmicos.

2.6 Teoremas de Imersão

Nesta seção estabeleceremos a conexão entre o espaço de fase da nossa série temporal (que também pode ser chamado de espaço de estados, ou simplesmente \mathbb{R}^k) e o espaço de fase

reconstruído $(\mathbb{R}^m)^4$. Primeiro vamos supor que \mathbb{R}^k é um espaço de estados de um sistema dinâmico, e que as trajetórias desse sistema são atraídas para uma variedade A (vide explicação no apêndice A) com d -dimensões possíveis. Também teremos que assumir que somos capazes de efetuar s medidas independentes desse sistema para cada instante de tempo t , diferente de uma série temporal, quando normalmente temos apenas uma medida s a cada instante de tempo. Para cada estado, então, vamos supor que nossas medidas resultem um vetor em \mathbb{R}^m . Logo, se fizermos várias medidas s em \mathbb{R}^k em vários instantes de tempos t diferentes, teremos então uma coleção de pontos em \mathbb{R}^m . Com isso, o processo de medida pode ser interpretado como uma função \vec{F} de \mathbb{R}^k em \mathbb{R}^m . Para qualquer tempo, um estado é um ponto de A em \mathbb{R}^k , e nós podemos sempre calcular \vec{F} para este ponto fazendo s medidas e vetorizando-as no espaço \mathbb{R}^m . A figura 2.4 fornece uma boa visualização dessa discussão.

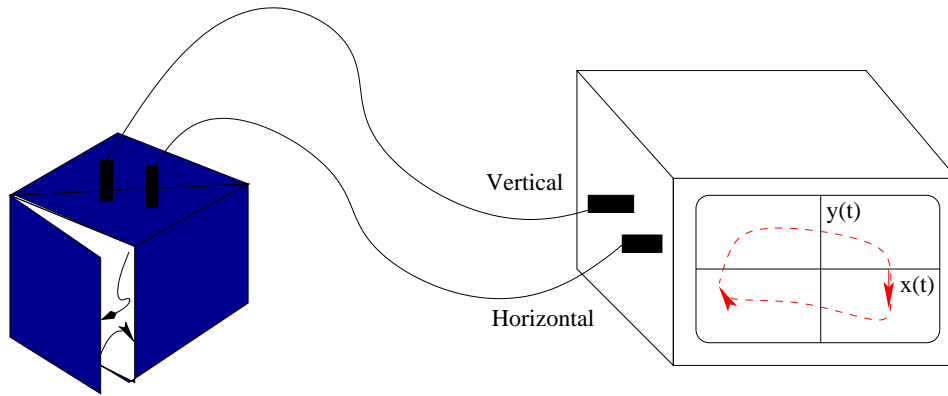


Figura 2.4: Nesta figura o sistema dinâmico no espaço \mathbb{R}^k é representado pela caixa fechada à esquerda. Duas medidas simultâneas independentes são plotadas uma contra a outra no display da tela da esquerda (o display representa o espaço reconstruído, \mathbb{R}^m). Cada estado \vec{x} do sistema dinâmico em \mathbb{R}^k será representado por um ponto (referente a um vetor) $F(\vec{x})$ na tela da direita. Figura retirada do livro “Coping with chaos” [14].

Já que estabelecemos as relações entre \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^m , devemos mostrar as restrições na formação desse elo entre esses espaços. Para a reconstrução da variedade A , dois tipos de imersões são relevantes. O primeiro tipo é a imersão topológica, que fornecerá uma correspondência

⁴Nesse caso, “ m ” é a dimensão de imersão do sistema, e representa a dimensão que desejamos reconstruir o espaço de fase.

unívoca entre os espaços. O segundo tipo é a imersão diferencial, que manterá a estrutura dessa variedade preservada, incluindo quantidades como os Expoentes de Lyapunov. Com isso em mente, estamos aptos a enunciar os teoremas de imersão de Whitney, mesmo que de uma forma qualitativa:

Imersão Topológica: *Assumindo que A é uma variedade de dimensão d em \mathbb{R}^k . Se $m > 2d$ e $\vec{F} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é genérica, então \vec{F} possui uma relação unívoca com A . [14]*

Isto significa que se $\vec{x} \neq \vec{y}$ são pontos de A , então $\vec{F}(\vec{x}) \neq \vec{F}(\vec{y})$ em \mathbb{R}^m . Dois estados distintos pertencentes à variedade A permanecem distintos quando são imersos no espaço \mathbb{R}^m , em outras palavras, $\vec{F}(A)$ não se auto-intersecciona.

O significado de “genérico” nesse contexto, torna-se sinônimo de “denso”⁵. É importante salientar uma propriedade das funções genéricas na qual uma função não-genérica com pequenas perturbações torna-se genérica.

Imagine por exemplo, que desejamos fazer uma imersão de uma variedade A unidimensional respeitando a regra de imersão de Whitney, ou seja, para $d = 1$ temos, $m > 2$, por isso, $m = 3$. Isto significa que para $m = 3$, temos uma relação unívoca entre os espaços \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^m , como enunciamos a pouco. Isso garantiria uma imersão perfeita (sem auto-intersecções) como na figura 2.5 (e). Agora imagine que desejamos fazer a imersão de uma variedade A não-genérica como no caso da figura 2.5 (f). Embora ela não seja uma imersão topológica (se auto-intersecciona), se fizermos pequenas perturbações nessa intersecção com o intuito de removê-la, tornamos essa função genérica, e assim, uma imersão. De uma forma um pouco mais formal, podemos dizer que se tivermos uma função $\vec{F}(x)$ qualquer, que não é genérica. Então, com apenas uma perturbação $\delta\vec{F}(x)$ nessa função, tal que a magnitude de $\delta\vec{F}(x)$ e de suas derivadas até ordem máxima “ n ” (isto é, $|\delta\vec{F}|$ e $|\partial^m \delta\vec{F}_j / \partial x_{i1} \partial x_{i2} \cdots \partial x_{im}|$ para $1 \leq m \leq n$) sejam pequenas, tornamos essa função $\vec{F} + \delta\vec{F}$ genérica.

Na figura 2.5 (a) mostramos a imersão para o caso unidimensional e na figura 2.5 (c) uma imersão bidimensional. Agora olhemos o caso inverso dessas duas figuras, quando não temos uma imersão. Isso ocorre na figura 2.5 (b) quando existe uma impossibilidade de imersão unidimensional, devido a uma falta de unicidade no espaço \mathbb{R}^m . Na figura 2.5 (d) não temos uma imersão bidimensional devido a auto-intersecção formada no espaço \mathbb{R}^m . Note que nesses dois casos, mesmo que desejemos perturbar as intersecções formadas nas figuras

⁵Um conjunto denso pode ser interpretado da seguinte maneira: Imagine que temos uma variedade A pertencente a um espaço B . O conjunto A é considerado denso em relação ao B se para todos os pontos de B houver sempre um ponto arbitrário de A muito próximo. Por exemplo, o conjunto de números racionais é denso em relação ao conjunto dos números reais.

2.5 (b) e (d), não existe uma direção a fim de removê-las sendo portanto elas não-genéricas e com isso, incapazes de formar uma imersão.

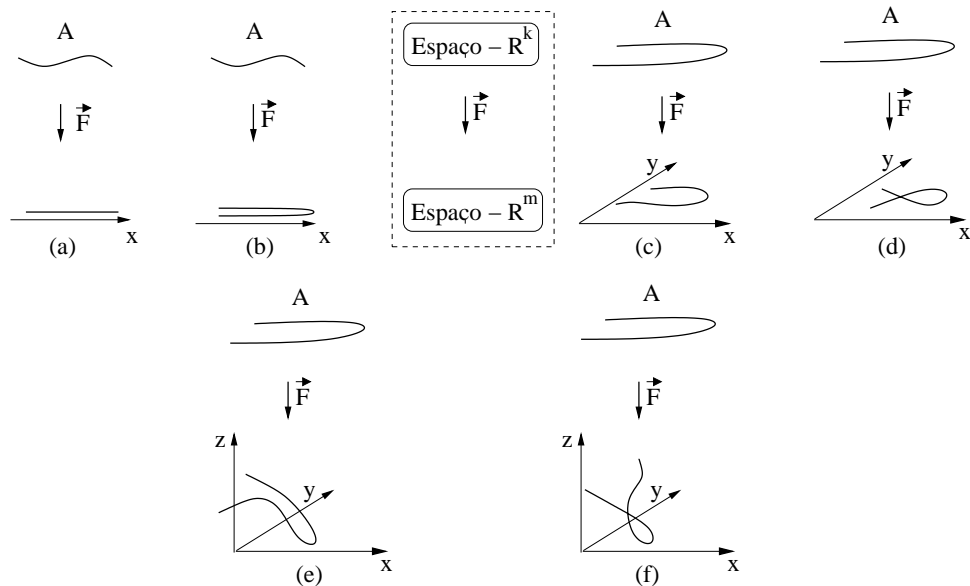


Figura 2.5: Em (a), (c) e (e) temos uma imersão topológica uni-dimensional, bi-dimensional e tri-dimensional respectivamente. Em (b) e (d) nem \vec{F} , nem pequenas perturbações dessa função são imersões. Já em (f), embora \vec{F} não seja uma imersão topológica, pequenas perturbações de \vec{F} na direção de y resultam em uma imersão. Figura reproduzida do livro “Coping with chaos” [14]

Imersão Diferencial: *Assumindo que A é uma variedade compacta e suave⁶ com d -dimensões em \mathbb{R}^k . Logo, uma variedade suave com d -dimensões, possui um espaço com d -dimensões tangentes em cada ponto de suas trajetórias. Se \vec{F} é uma função suave de uma variedade (em \mathbb{R}^k) relação a outra (em \mathbb{R}^m), então a jacobiana $d\vec{F}$ mapeia vetores tangentes em vetores tangentes. Mais precisamente, cada ponto de \vec{x} pertencente à variedade A do mapa $d\vec{F}(x)$, é linearmente mapeado do espaço tangente em \vec{x} para o espaço tangente $\vec{F}(x)$ (em \mathbb{R}^m). Se para todo \vec{x} em A , nenhum vetor não nulo mapeie o valor zero através de $d\vec{F}$, então \vec{F} é chamada de uma “imersão”. Uma função suave \vec{F} atuando sobre um variedade suave é chamada uma “imersão diferencial” se \vec{F} e \vec{F}^{-1} são imersões unívocas. [14]*

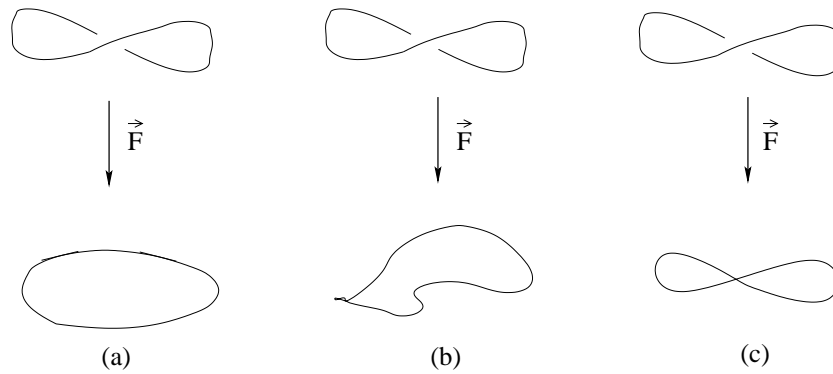


Figura 2.6: (a) Imersão topológica e diferencial; em (b) imersão topológica, mas não diferencial; em (c) nem imersão topológica nem diferencial.

A figura 2.6a mostra a imersão de um círculo A . Na figura 2.6b, embora \vec{F} seja unívoca em relação à A e possua uma imersão topológica, a função \vec{F} não é uma imersão diferencial devido a formação de uma “quina”, provocando uma descontinuidade no espaço tangente. A figura 2.6c mostra uma imersão que não é unívoca, logo, não é uma imersão topológica nem diferencial. Em particular, uma imersão diferencial é automaticamente uma imersão topológica. A partir dos dois teoremas podemos concluir que para obtermos uma imersão é necessário que a relação entre o espaço original e o espaço reconstruído seja um diffeomorfismo [14] (vide apêndice C). Agora imagine que nossa habilidade em fazer medidas independentes no espaço de estados \mathbb{R}^k seja limitada e que possamos fazer apenas uma medida independente para cada instante de tempo (como uma série temporal). Será possível reconstruir a nossa variedade A , e com isso o atrator do nosso sistema? Takens provou que sim através do seu “teorema de imersão através de coordenadas de retardo”.

⁶Uma função suave é aquela que possui todas as derivadas desde ordem 1 até “ n ”. Um contra exemplo pode ser a função $f(x) = |x|$ que possui derivada descontínua em $x = 0$.

Teorema de Imersão de Takens: *Assumindo que A é uma variedade d -dimensional em \mathbb{R}^k e que essa variedade é invariante sobre o sistema dinâmico \vec{g} . Se $m > 2d$ e $\vec{F} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função de reconstrução através de coordenadas de retardo, com uma função medida genérica h e tempo de retardo genérico τ , então, F é unívoca e A . [2]*

Para entendermos com clareza o teorema Takens, é necessário mencionarmos o significado da função medida h , do tempo de retardo τ e o estado de um sistema dinâmico g . Primeiro enunciaremos a função de coordenadas de retardo, depois, nos utilizaremos dela e um exemplo para explicarmos melhor as outras grandezas. A função de coordenadas de retardo pode ser expressa matematicamente como:

$$\vec{F}(x) = [h(x), h(g_{-\tau}(x)), \dots, h(g_{-(m-1)\tau}(x))]. \quad (2.3)$$

Em seguida, fazemos apenas uma medida independente no espaço de estados \mathbb{R}^k , representada pela função h , resultando em uma série temporal. Após isso, escolhemos um estado nessa série temporal (um valor escalar), o qual chamaremos de v . O teorema de Takens garante que se atrasarmos este estado v por um tempo de retardo τ , representado por $g_{-\tau}(v)$ e retardarmos sucessivamente até $h(g_{-(m-1)\tau})$, essas funções formarão um vetor (um ponto) no espaço reconstruído \mathbb{R}^m . A figura 2.7 mostra a analogia entre o espaço \mathbb{R}^k e o espaço \mathbb{R}^m quando se utiliza a imersão de uma série temporal pelo teorema de Takens, onde x é um estado qualquer. Já a figura 2.8 mostra um exemplo para o caso quando $m = 3$ (imersão em um espaço tridimensional), ou seja, a partir das coordenadas de retardo v , $g_{-\tau}(v)$ e $g_{-2\tau}(v)$, como formamos um ponto no espaço \mathbb{R}^m .

Para a reconstrução de vários pontos em \mathbb{R}^m , formando um atrator, agimos de acordo com a figura 2.9, utilizando a mesma metodologia da figura 2.8. Ela mostra como devemos portar-se quando quisermos reconstruir um atrator (para $m=3$) de um sistema a partir de uma série temporal. Veja a figura 2.9(a). Se escolhermos um estado $h(v)$ na série temporal, ou seja, um estado onde já foi aplicada a função de medida h , e retardarmos-lo de acordo com a relação 2.3, obtemos as coordenadas de retardo $h(g_{-\tau}(v))$ e $h(g_{-2\tau}(v))$. Se projetarmos cada uma dessas coordenadas de retardo sobre cada um dos eixos cartesianos em \mathbb{R}^m (figura 2.9(b)), formaremos um vetor (figura 2.9(c)) e conseqüentemente um ponto em \mathbb{R}^m (figura 2.9(d)).

Assim, para projetarmos um segundo vetor procederemos da mesma maneira, ou seja, escolheremos um outro estado nessa série temporal, o qual chamaremos de v_1 , retardaremos-lo de acordo com a equação 2.3, e obteremos as coordenadas de retardo relativas à esse estado

v_1 , ou seja, $g_{-\tau(v_1)}$ e $g_{-2\tau(v_1)}$, como ocorre na figura 2.9(d). Na figura 2.9(e) mostramos a construção do vetor pertinente à v_1 , $g_{-\tau(v_1)}$ e $g_{-2\tau(v_1)}$ resultando no segundo ponto em \mathbb{R}^m (figura 2.9(f)).

Nas figuras 2.9(g), 2.9(h), 2.9(i), 2.9(j) e 2.9(k) mostramos a construção de mais pontos em \mathbb{R}^m , sempre utilizando o mesmo procedimento, ou seja, escolhendo um estado na série temporal, achando suas coordenadas e com elas, plotando um novo vetor em \mathbb{R}^m , até que esse procedimento resulte-nos na reconstrução total do atrator, como mostra a figura 2.9(l).

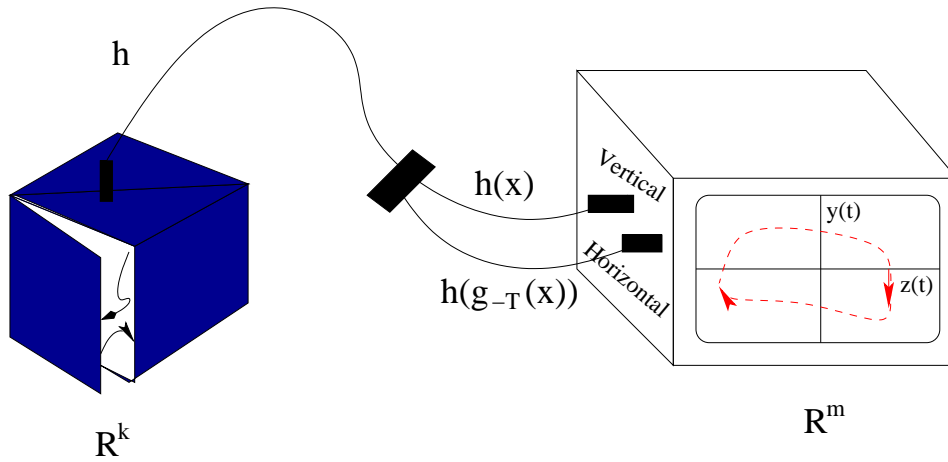


Figura 2.7: Relação entre o espaço \mathbb{R}^k e o espaço reconstruído \mathbb{R}^m . Nesse caso, fazemos a imersão baseada em apenas uma medida independente para cada tempo t , diferente da figura 2.4 quando fazemos a imersão baseada em várias medidas independentes para cada tempo t . Figura retirada do livro "Coping with Chaos" [14]

Em 1991, Sauer [14] generalizou o Teorema de Takens provando que d , contido na relação $m > 2d$, poderia vir a ser uma dimensão fractal. Como nesse trabalho utilizaremos apenas a técnica de Takens, não entraremos em detalhes sobre a generalização efetuada por Sauer. Para o leitor mais curioso, alguns apontamento feitos por Sauer encontram-se no livro *Coping with Chaos* [14]. Na figura 2.10 mostramos o caso quando $m = 3$ para o atrator de Lorenz.

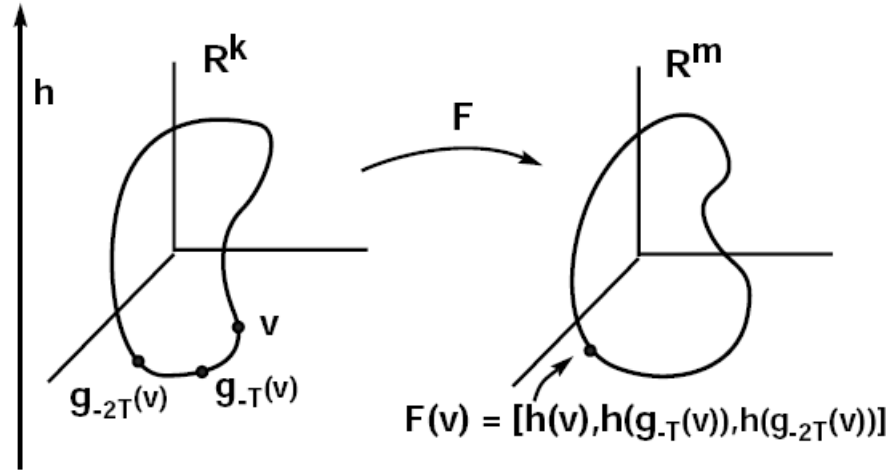


Figura 2.8: (a) Imersão através de coordenadas de retardo. Cada estado v no espaço \mathbb{R}^k possui um vetor $\vec{F}(v)$ no espaço reconstruído \mathbb{R}^m . A função h é a função escalar de medida no espaço \mathbb{R}^k . Figura retirada do livro "An introduction to dynamical systems" [2]

2.7 Idéia da Recorrência

Se procurarmos no dicionário, veremos que a palavra recorrência deriva do latim *recurren- cia*, que significa: retorno; repetição. Contudo, sua ligação direta com a teoria de sistemas dinâmicos deve-se a Henri Poincaré (1854-1912), quando em 1890, publicou seu trabalho seminal [15] atribuindo à recorrência um significado matemático, incluso no "Teorema da Recorrência de Poincaré". Para entendermos melhor, podemos enunciar o teorema de acordo com a interpretação de Kac (1959) e Cornefeld et. al.(1982) retiradas da referência [16]:

Teorema da Recorrência de Poincaré: "Em um conjunto Ω define-se uma medida positiva⁷ μ , com $\mu(\Omega) < \infty$ (por simplicidade adotaremos $\mu(\Omega) = 1$). Suponha que exista um conjunto de transformações ζ_t , unívoca de Ω nele mesmo, que preserve a medida. Seja $I \in \Omega$ um subconjunto, tal que $\mu(I) > 0$. Então para quase todo (a menos de um conjunto de medida μ nula) $\omega \in I$ existe um tempo t tal que $\zeta_t \omega \in I$."

O teorema da recorrência de Poincaré garante que, para um conjunto grande de

⁷Essa medida pode ser interpretada como a frequência de visitação de uma determinada região no espaço de fase.

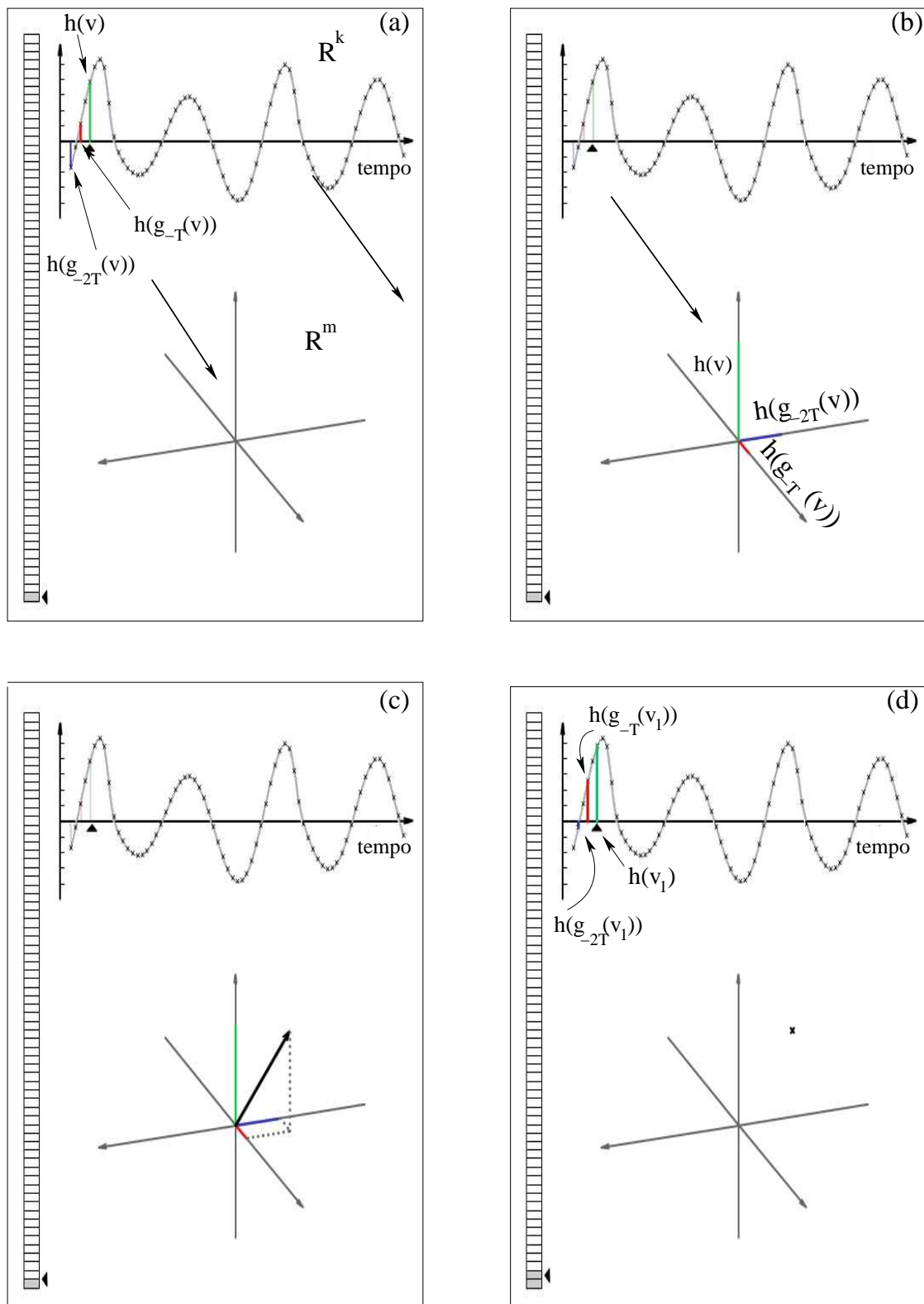
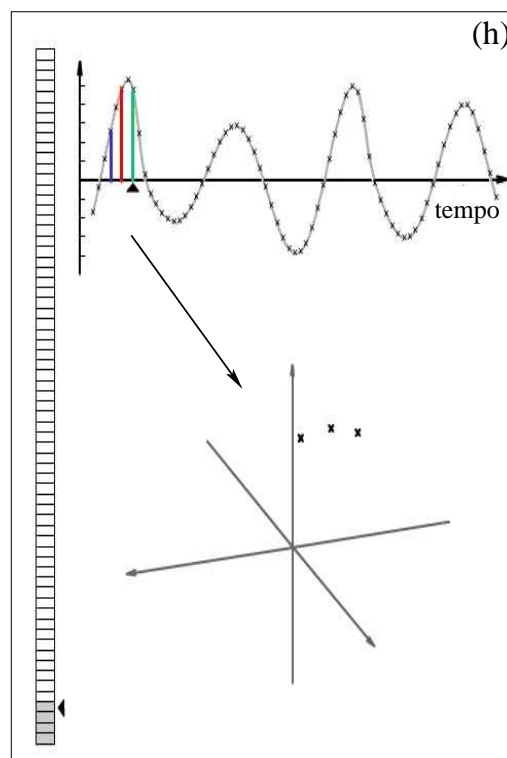
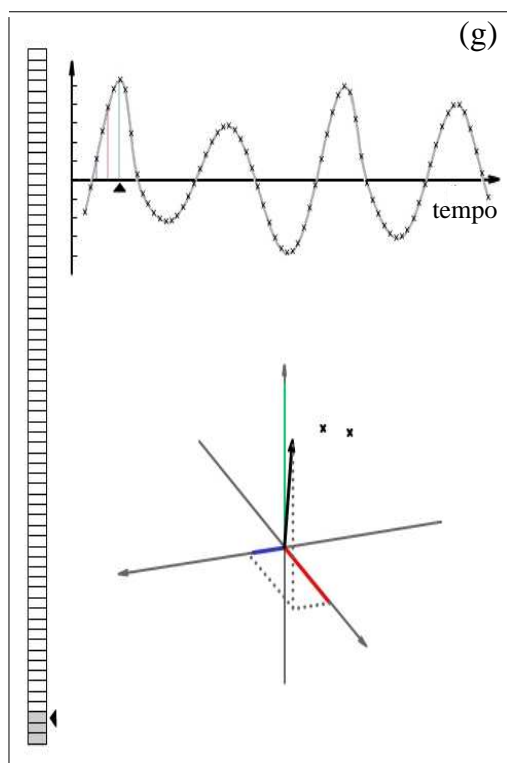
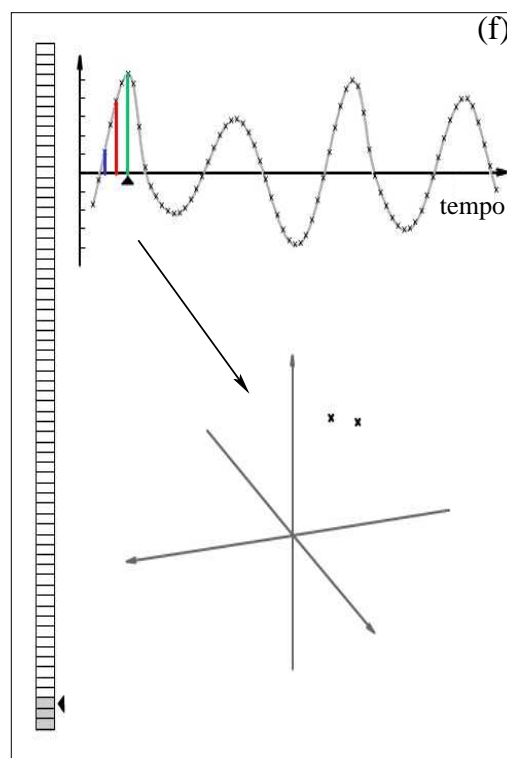
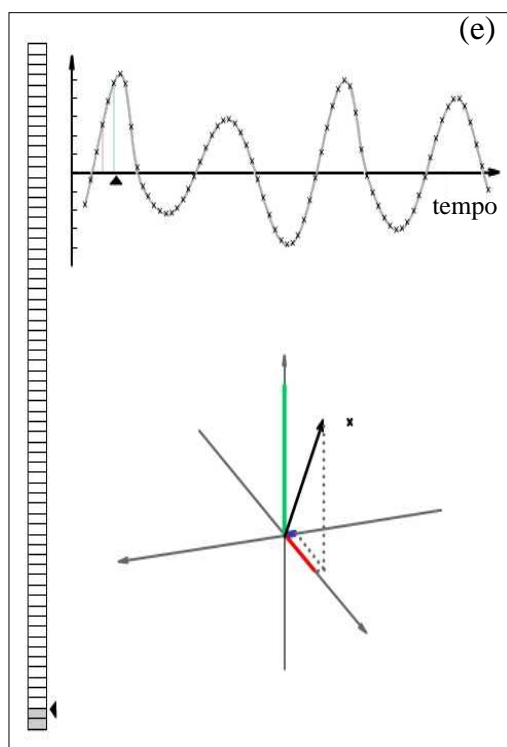
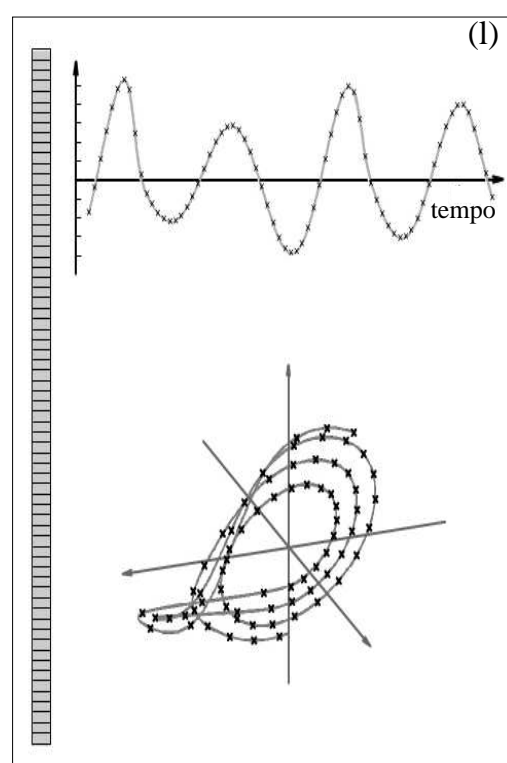
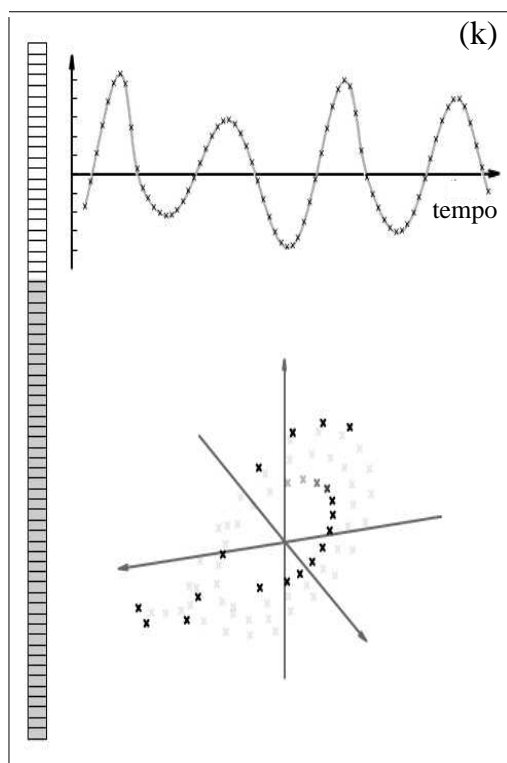
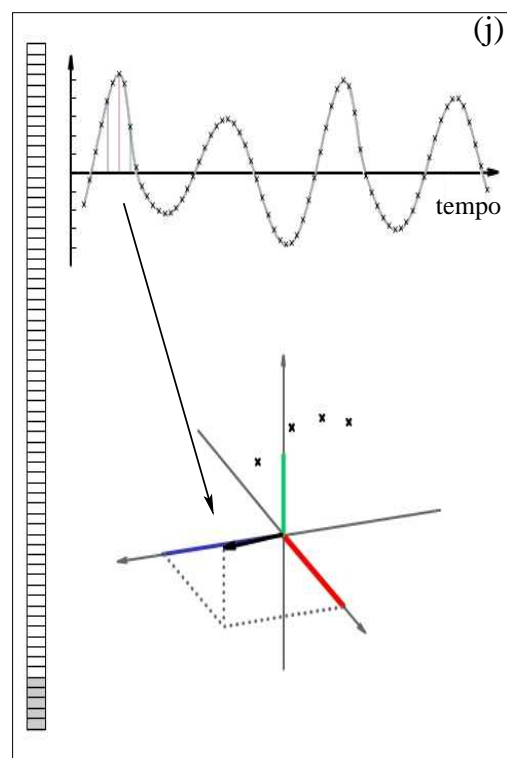
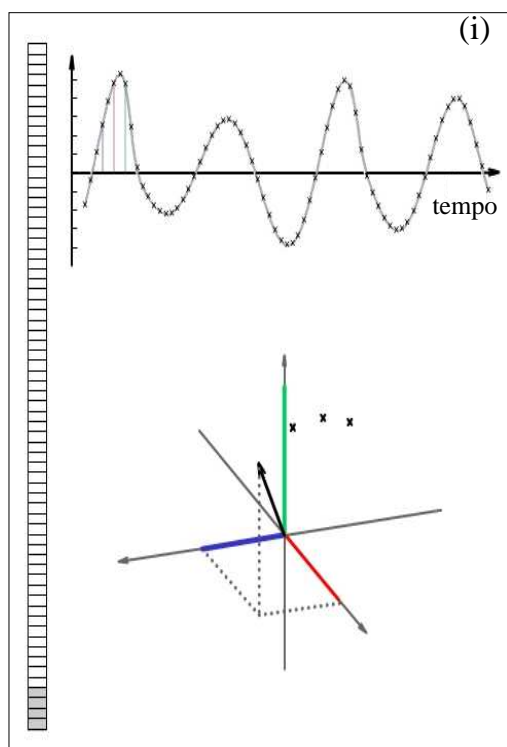


Figura 2.9: Imersão através de coordenadas de retardo. As figuras (a),(b),(c) e (d) mostram como é feita a imersão através de algumas componentes da série temporal. Nas figuras (e),(f),(g) e (h) temos a continuação do processo de imersão para uma quantidade maior de pontos





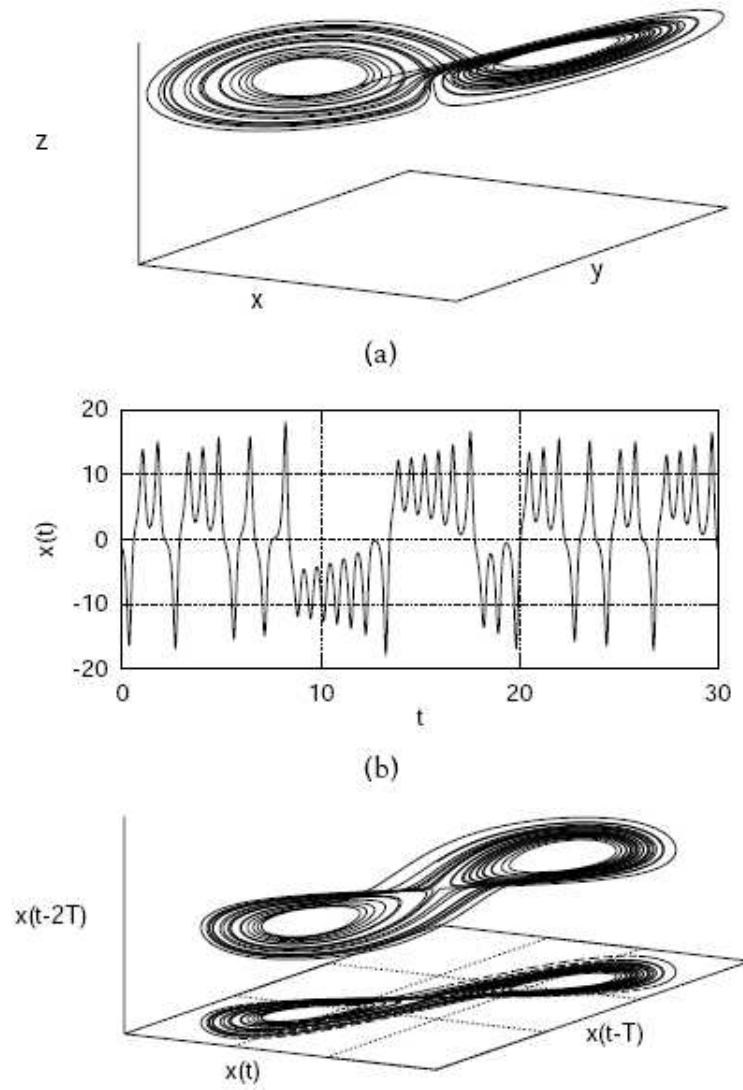


Figura 2.10: (a) Uma trajetória do sistema de Lorenz, evoluída 30 tempos. (b) A coordenada “ x ” da trajetória em (a) plotada em função de “ t ”. (c) Imersão por coordenada de retardo do atrator de Lorenz utilizando três valores de retardo da série temporal em (b). A projeção das primeiras duas coordenadas também é mostrada. Figura de Alligood et. al., 1996 [2].

sistemas dinâmicos, as trajetórias retornam infinitas vezes arbitrariamente próximas a quase todos os pontos iniciais (a menos de um conjunto de medida μ nula), formando um conjunto infinito de instantes de retorno [16]. Na prática, é impossível encontrar sistemas caóticos com recorrência completa, no sentido de que $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ (isto é, o estado de um sistema caótico não pode recorrer exatamente ao estado inicial) [17]. Por isso torna-se obrigatório o uso de uma vizinhança m -dimensional, como a utilizada na figura 2.11. A geometria e as propriedades dessa vizinhança serão discutidas na sessão 2.8.4.

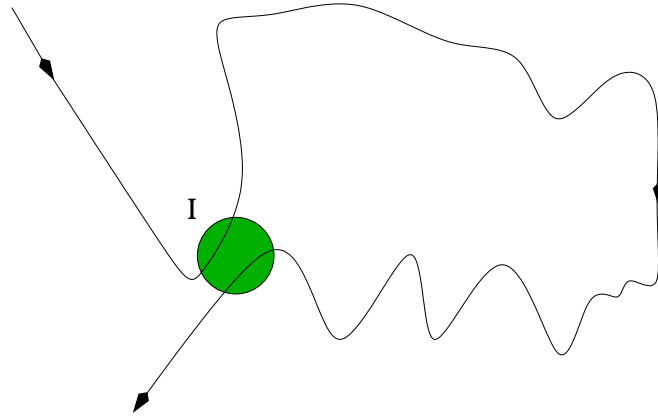


Figura 2.11: Ilustração da Recorrência de Poincaré em um conjunto “I” qualquer, de um espaço bi-dimensional arbitrário.

2.8 Gráficos de Recorrência

Baseado na idéia de Poincaré, em 1987, Eckmann et al. [6] introduziram uma ferramenta conhecida como: *Gráficos de Recorrência (ou simplesmente Recurrence Plots- RPs)* com a finalidade de visualizar a dinâmica de sistemas recorrentes. De acordo com a definição original do Gráfico de Recorrência [6], enunciada também por Holyst et. al. [18], definimos o Gráfico de Recorrência como:

“O Gráfico de Recorrência de uma série temporal de N pontos $x(N)$, onde N é o índice temporal, é uma “matriz $N \times N$ ” (matriz gráfica) preenchida por pontos brancos e pretos. O ponto preto, chamado de ponto recorrente, é colocado na matriz de recorrência com coordenadas (i, j) somente se a distância $\rho(i, j)$ no instante $n = i$ e $n = j$ (entre o estado corrente do sistema e o estado a ser comparado) for menor que uma certa distância (raio) ρ_0 , fixado no centro do estado corrente” [6].

No entanto, uma notação matemática mais moderna vem sendo comumente utilizada nos artigos científicos [17], [19], [20], expressa como:

$$\vec{R}_{i,j}^{m,\rho_0} = \theta(\rho_0 - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad \vec{x}_i \in \mathbb{R}^m, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

Onde:

- N é o número de estados x_i considerados;
- ρ_0 é o raio da vizinhança (threshold) no ponto x_i ;
- $\|\cdot\|$ é a norma da vizinhança, comumente a norma euclidiana;
- $\theta(\cdot)$ é a função de Heaviside;
- m é a dimensão de imersão.

Se $\vec{R}_{i,j}=1$, o estado é dito recorrente e como consequência, um ponto preto é marcado no RP. Caso $\vec{R}_{i,j}=0$, o estado é “não-recorrente” e marcamos um ponto branco no RP. Uma outra forma de definir o RP, um pouco mais resumida, foi utilizada por March et. al. [21]. Nesse caso, o RP é definido como um tensor T_{ij}^d cujos elementos correspondem a distância entre cada um dos N^2 pares possíveis de coordenadas x_i e x_j :

$$T_{ij}^A = \theta(\rho_0 - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|). \quad (2.5)$$

Nesse caso, A é a dimensão onde calculamos a distância entre x_i e x_j . Os outros parâmetros são análogos a equação 2.4, com a exceção de que nesse caso, a norma típica do RP é a norma máxima (infinita).

2.8.1 Categorias de Gráficos de Recorrência

Eckmann et. al. [6] dividiram os gráficos de recorrência em duas categorias: padrões de larga escala (chamados por ele de tipológicos (*typology*)) e de pequena escala (*texture*). Os padrões de larga escala oferecem uma visão global do gráfico de recorrência e são divididos em:

- Homogêneo: Apresentam pontos pequenos se comparados com o gráfico de recorrência como um todo, ou seja, o tempo de duração de cada linha diagonal ou vertical formada (estados sucessivos) é curto em relação ao tempo total de exposição do sistema. As figuras 2.12 (a) e 2.14 (a) apresentam essa tipologia.

- Deriva (drift): A deriva acontece principalmente quando o sistema possui uma variação de parâmetros lenta. Tais variações provocam uma ausência de pontos recorrentes, tanto no canto superior esquerdo quanto no inferior direito do gráfico de recorrência, como apresenta a figura 2.14 (c).
- Periódico: Sistemas oscilantes sempre apresentam linhas diagonais totalmente preenchidas e paralelas a diagonal principal. Além disso, apresentam também estruturas de blocos recorrentes. A figura 2.14(b) mostra o caso periódico de duas senóides geradas para duas frequências distintas.
- Descontínuo (checkboard): A descontinuidade é causada por mudanças abruptas na dinâmica, bem como a ocorrência de eventos raros, ocasionando bandas brancas. Isso pode ser visto na figura 2.14 (d).

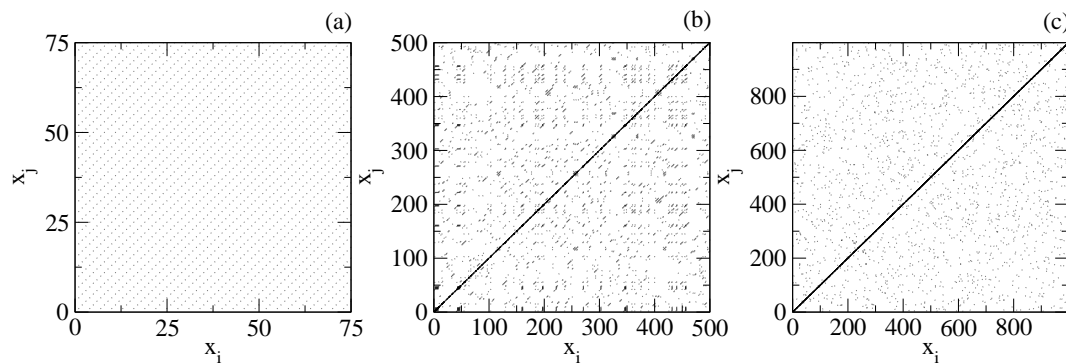


Figura 2.12: Gráficos de Recorrência: (a) Periódico, mapa logístico com $r = 3.83$, $\rho_0=0.01$, $\tau=1$, (b) Caótico, mapa logístico com $r = 4.0$ e (c) Estocástico, ruído uniformemente distribuído.

Os padrões de pequena escala, como o próprio nome sugere, são os pontos singulares, as linhas diagonais, verticais, horizontais e as estruturas de blocos formadas por essas linhas.

- Pontos (pixels): Representam estados recorrentes. Se o ponto estiver isolado, significa um estado raro no sistema.
- Linhas Diagonais: Ocorrem quando uma parte da trajetória evolui de forma paralela (similar) a outro segmento de trajetória, isto é, a trajetória visita a mesma região

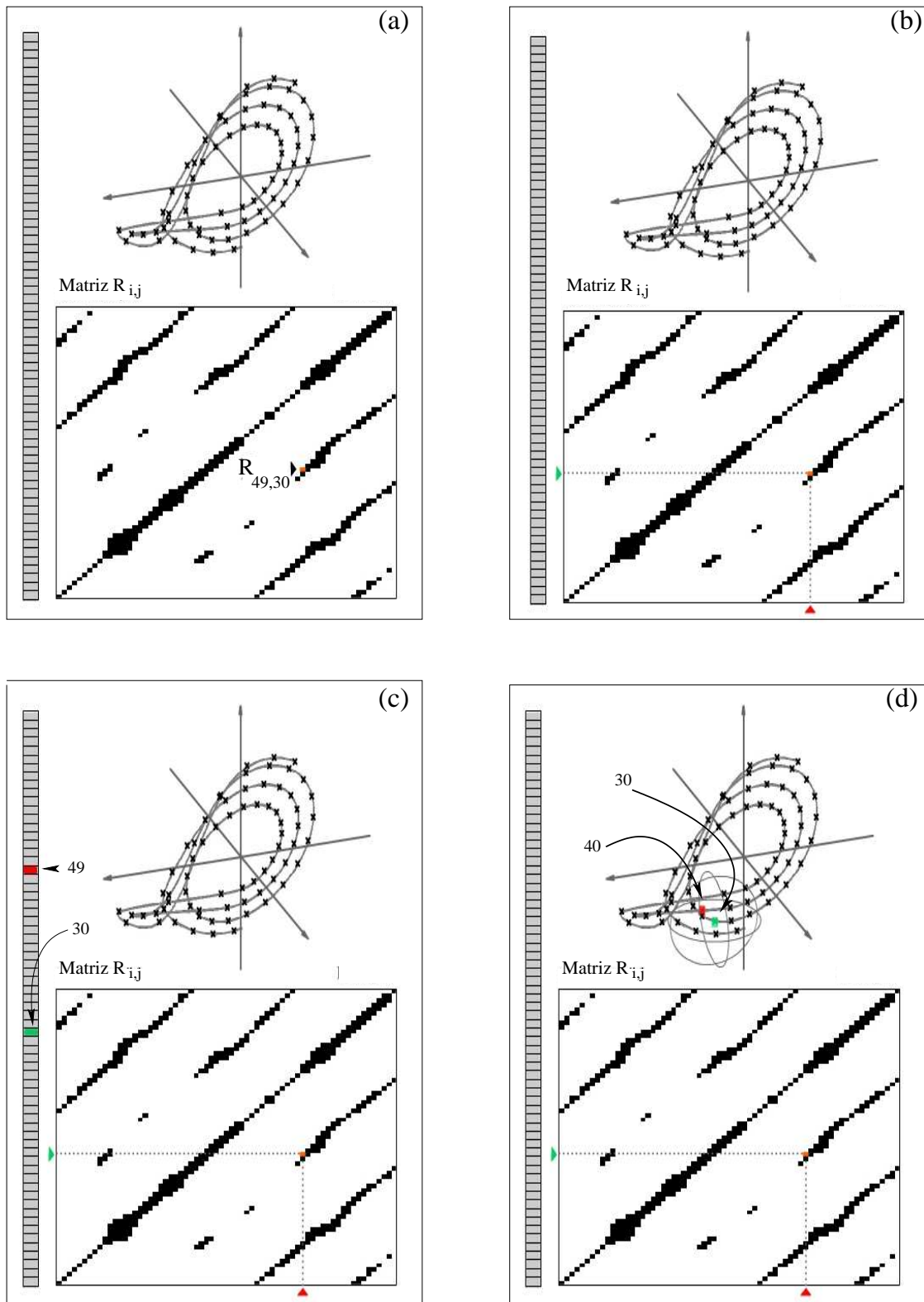
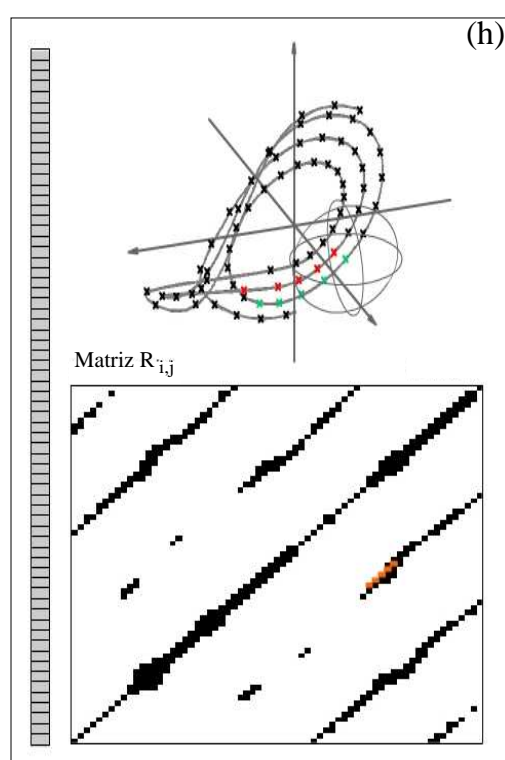
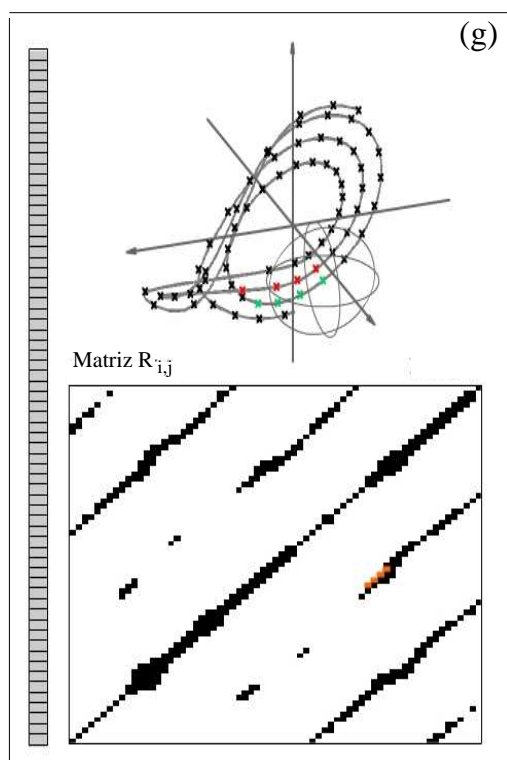
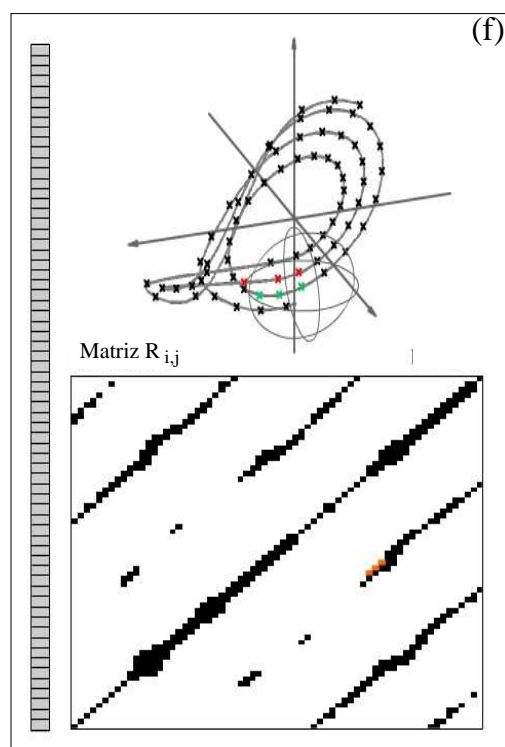
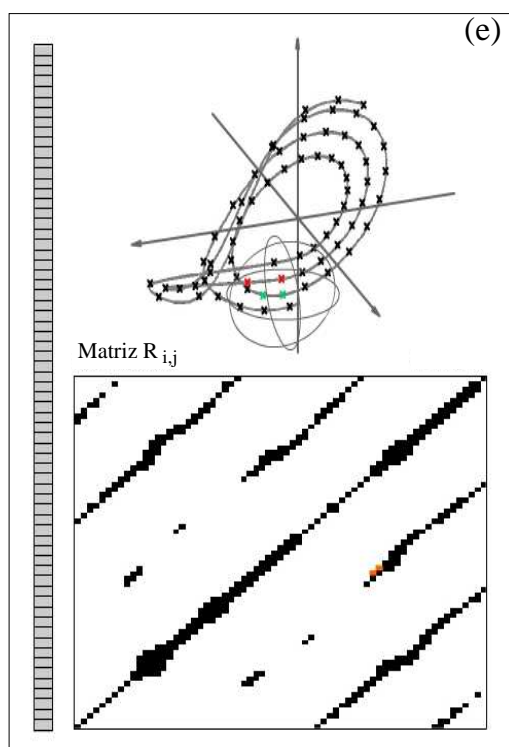


Figura 2.13: Comparação entre as linhas diagonais da matriz do gráfico de recorrência (GR) e o atrator que deu origem a essa matriz. Figuras originais retiradas do site www.recurrence-plot.tk [17].



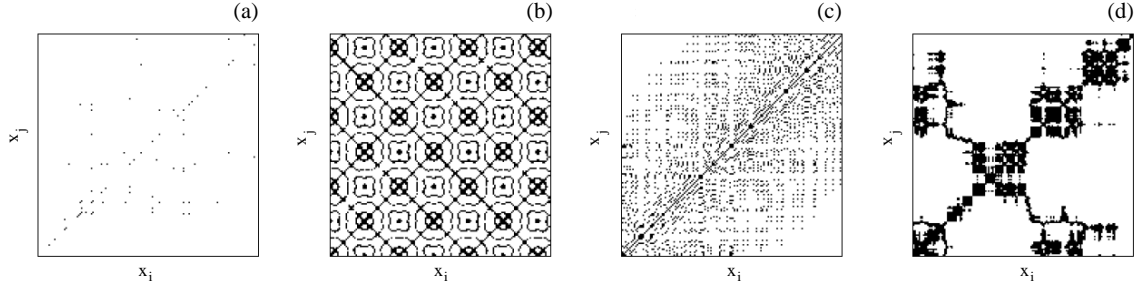


Figura 2.14: Algumas tipologias características de GRs. (a) Homogêneo, (b) Periódico (oscilações harmônicas superpostas), (c) Deriva (mapa logístico corrompido com ruído) e (d) Descontínuo (movimento browniano). Figura retirada da tese “Encounters with Neighbours”, 2001 [17]

do espaço de fase em tempo diferentes. O comprimento dessas estruturas diagonais é determinado pela duração dessa evolução similar de tal segmento da trajetória [17]. Na figura 2.13 mostramos a representação de um linha diagonal em relação ao atrator reconstruído. Em (a) selecionamos um ponto no gráfico de recorrência, que equivalem aos pontos 30 e 45 dentro do atrator, como podemos ver na figura 2.13(b), (c) e (d). Na figura 2.13(e), (f), (g) e (h) continuamos essa comparação, sempre mostrando a equivalência do ponto (laranja) no gráfico de recorrência e quais trajetórias lhe deram origem no gráfico de recorrência. Ou seja, um ponto no gráfico de recorrência equivale à dois pontos vizinhos e recorrentes no atrator.

- **Linhas Verticais (e Horizontais):** A ocorrência de linhas verticais demonstra um comprimento temporal em que o estado do sistema não muda, ou seja, permanece estacionário durante a evolução temporal. Sistemas intermitentes geralmente apresentam esse comportamento.

Devido a dificuldade de visualizar riquezas na dinâmica apenas com o gráfico de recorrência (a matriz), fez-se à necessidade de criarem quantificadores que contabilizem essas estruturas presentes no GR como: diagonais, verticais, etc. Isso proporciona uma maior sensibilidade aos resultados, magnificando principalmente transições que se desenvolvem em escalas de tempos muito curtas. Na seção 2.9 introduziremos essas medidas.

2.8.2 Escolha apropriada da dimensão de imersão (*embedding dimension*)

De acordo com os teoremas de imersão, vistos na seção 2.6, a preservação das estruturas topológicas da trajetória original de um sistema é garantida se, e somente se, $m \geq 2d + 1$,

onde d é a dimensão do atrator e m a dimensão de imersão. Contudo, isso não impossibilita uma imersão que não satisfaça essa relação de dimensões, e caso isso ocorra, ela apenas não possuirá uma comprovação matemática rigorosa.

Por isso, utilizamos $m = 1$ para todos os cálculos, ou seja, analisamos apenas medidas de uma série temporal em um tempo t comparando-nas com outras medidas dentro dessa mesma série em tempos diferentes, sem necessariamente fazer uma imersão multidimensional. Por hora, não daremos justificativas à escolha específica de m , pois voltaremos a discutir esse tópico nos parágrafos seguintes.

Não obstante, se tentarmos imergir uma série temporal quando não é conhecida a dimensão d do atrator, torna-se impossível usufruir da relação proposta por Whitney ($m \geq 2d + 1$) para a escolha de um m adequado. Quando esse for o caso, podemos recorrer à duas hipóteses:

- Imersão com base em um diagnóstico conhecido. Nesse caso, começamos com uma dimensão de imersão igual à um ($m = 1$) e aumentamos essa dimensão m sucessivamente até uma imersão alta, $m = 6$ por exemplo. Se esse suposto diagnóstico conhecido permanecer inalterado com a mudança de m , usa-se a dimensão de imersão mais baixa para qual o mesmo permanece nessa invariância. Está técnica torna-se um pouco subjetiva, mas na prática funciona para quase todo tipo de sistema dinâmico conhecido.
- Investigação de mudanças na vizinhança de pontos no espaço de fase. Se partirmos de uma imersão alta, $m = 6$ por exemplo, podemos ter uma noção de como muda a vizinhança de cada ponto ao passo que diminuimos m . Vizinhos verdadeiros sempre permanecem vizinhos, independente do m utilizado. Uma dimensão de imersão inadequada pode causar um aumento nessa quantidade de falsos vizinhos e, por isso, induzir a falsos diagnósticos.

Existem vários métodos que utilizam a técnica de falsos vizinhos. Sua idéia básica pode ser visualizada na figura 2.15. Através do decréscimo da dimensão de imersão (de $m = 3$ até $m = 1$, como representamos na figura 2.15) ocorre um aumento no número de vizinhos (pontos brancos na figura 2.15) dentro de uma determinada vizinhança (círculos maiores em (a) e (b), ou meia esfera em (c)) de um ponto no espaço de fases (cruz). Esses vizinhos nem sempre são verdadeiros, muitos deles são apenas uma consequência do decréscimo dimensional. Tais vizinhos são chamados de “falsos vizinhos”. A dimensão de imersão ideal é aquela escolhida quando o número de falsos vizinhos cai à zero.

Essa técnica foi proposta inicialmente por Kennel et. al. [22] com a vantagem de fornecer uma relação direta entre a dimensão de imersão com a quantidade de falsos vizinhos. Para testá-la utilizamos o algoritmo “*false_nearest*” proposto por Hegger et al. (1997) [23],

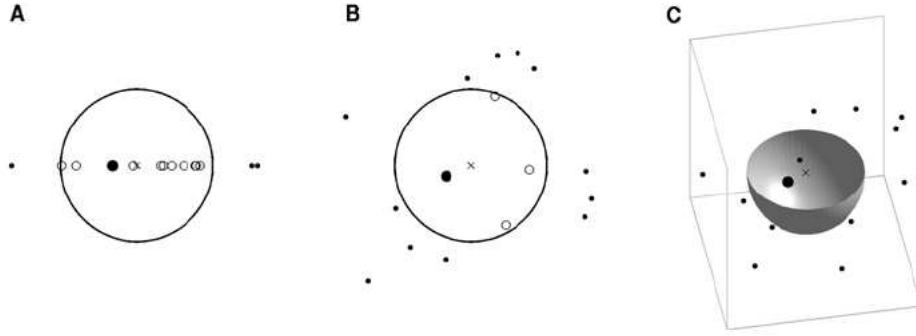


Figura 2.15: Representação gráfica da técnica de falsos vizinhos. Os falsos vizinhos são representados por círculos pequenos e ociosos aprisionados dentro de uma determinada vizinhança (círculos maiores em (a) e (b) ou meia esfera em (c)) de um ponto no espaço de fases (cruz). Os verdadeiros vizinhos são representados por círculos pequenos e preenchidos. (a) $m = 1$ (b) $m = 2$ (c) $m = 3$. Figura retirada de [17].

mas baseado na técnica de Kennel et. al. [22], incluso no software TISEAN. Hegger et al. [23] julgam como adequado a escolha de um m quando a fração de falsos vizinhos cai a zero. Na figura 2.16 mostramos a fração de falsos vizinhos para uma série temporal gerada por 3 (três) mapas logísticos globalmente acoplados, variando a dimensão de imersão m desde 1 até 5. Como podemos notar, a fração de falsos vizinhos não cai a zero nem para valores de m grandes, revelando que para algumas classes de sistemas a rotina *"false_nearest"* não funciona muito bem. Um detalhe interessante, é que a porcentagem de falsos vizinhos torna-se invariante à escolha do retardo (delay). Por esses motivos, resolvemos optar pela segunda hipótese (mencionada no começo dessa seção), na qual nossos diagnósticos são testados desde $m = 1$ até $m = 10$, com um suposto diagnóstico conhecido (esse diagnóstico dito "conhecido" será discutido na seção de sincronização, e faz alusão a variedade de sincronização). Com esse procedimento, escolhemos $m = 1$ como dimensão de imersão, o que nos leva a crer que o processo de imersão algumas vezes não é necessário, já que utilizando $m = 1$, não estamos fazendo uma reconstrução do atrator, mas sim comparando medidas de uma série temporal, como já havíamos mencionado no começo da seção. Essa previsibilidade acerca da invariância de alguns diagnósticos sem a necessidade de imersão, utilizando $m = 1$, já havia sido comprovada em 1998 com Iwanski et. al. [24], quando obtiveram resultados significativos na detecção de bifurcações para o sistema de Lorenz, o mapa logístico e ainda para dados experimentais. March et. al. [21] mostraram, com argumentos estatísticos, que a imersão é um processo de duplicação de informação, e que muitas vezes não fornece ganhos adicionais

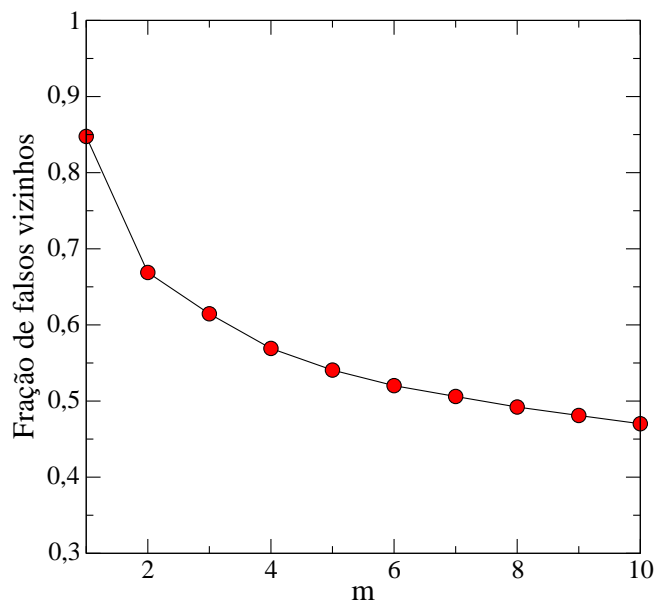


Figura 2.16: Fração de falsos vizinhos em função da dimensão de imersão para 3 mapas logísticos acoplados globalmente.

dessa informação, somente redundâncias.

2.8.3 Escolha do tempo de retardo (*delay*)

Em experimentos (ou até mesmo em sistemas dinâmicos teóricos) muitas vezes não podemos medir todas as componentes de um vetor $\vec{x}(t)$, dado um estado qualquer de um sistema. Suponha que podemos medir apenas uma componente desse vetor, a qual escrita de uma forma matemática representa uma função escalar do nosso vetor de estado $\vec{x}(t)$:

$$g(t) = G(\vec{x}(t)). \quad (2.6)$$

Dada essa situação, poderíamos reconstruir o atrator desse sistema? A resposta é sim, como já havíamos visto na seção 2.6. Para isso precisamos definir novos vetores $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ em função das coordenadas de retardo como:

$$y_1(t) = g(t), \quad (2.7)$$

$$y_2(t) = g(t - \tau), \quad (2.8)$$

$$y_3(t) = g(t - 2\tau), \quad (2.9)$$

$$\vdots \quad (2.10)$$

$$y_m(t) = g[t - (m - 1)\tau]. \quad (2.11)$$

Onde τ é um intervalo fixo de tempo a ser escolhido [1]. A dificuldade fica por conta de saber qual é o τ adequado para cada sistema. Uma das técnicas mais conhecidas é a proposta por Fraser e Swinney [25], nomeada com informação mútua média. Matematicamente podemos defini-lá como:

$$S = - \sum_{ij} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}. \quad (2.12)$$

A informação mútua média é calculada via entropia de Shannon [26], a qual procura identificar o quanto de informação podemos obter de uma medida i , com um probabilidade p , em um tempo t , pertencente a uma partição p_i de uma série temporal (a qual posteriormente foi dividida em partições, vide figura 2.17⁸), quando se observa uma outra medida j , da mesma série, com um probabilidade p , pertencente a uma partição p_j , em um tempo $t + \tau$.

Segundo a expressão da entropia, devemos fazer a escolha do retardo τ quando a informação mútua média tiver um mínimo “marcante”, ou seja, quando a probabilidade que tenhamos uma medida com informação em ambas as partições p_i e $p_j(\tau)$ seja bem pequena. Isso se justifica através do fato de que, quanto menor a informação conjunta de p_i e $p_j(\tau)$, podemos dizer que “menos importância” esse valor da série tem quando for projetado em outro eixo para servir de coordenada (o que significa que as medidas de p_i e p_j , quando são mínimas, são altamente descorrelacionadas).

Para Hegger et al. [23] o resultado do tempo de retardo não possui dependência com o número e nem com o tamanho das partições utilizadas. Nota-se que a equação da entropia 2.12 realmente não fornece nenhuma restrição ao respeito do tamanho das partições utilizadas na divisão da série. Da mesma forma que agimos no caso da detecção dos falsos vizinhos, testamos a informação mútua média para 3 mapas logísticos acoplados globalmente, também

⁸Quando falamos em partições fazemos alusão a pequenos blocos de dados (conjuntos) de um série temporal, não necessariamente com o mesmo número de pontos.

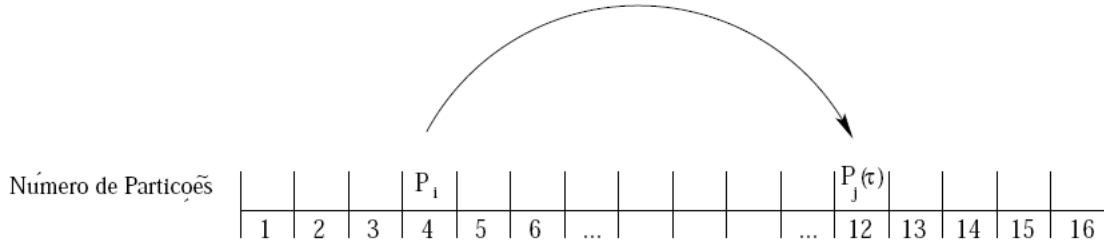


Figura 2.17: Informação mútua média. Nesse caso, a série temporal foi dividida em 16 partições.

utilizando o *software* TISEAN [23], no entanto, com o algoritmo *mutual*. O resultado pode ser visto na figura 2.18.

Conforme a indicação teórica no cálculo da informação mútua média [23], deveríamos escolher $\tau = 5$ ou maior, já que todos possuem um mínimo de informação. No entanto, nossos diagnósticos (os quais veremos no capítulo 3) se mostraram invariantes a escolha do tempo de retardo. Optamos então, por simplicidade, pela escolha de $\tau = 1$.

2.8.4 Raio da vizinhança (*threshold*)

Como havíamos comentado na seção 2.7, uma recorrência completa do tipo $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ é tipicamente improvável para um sistema dinâmico caótico. Disso vem a necessidade de definirmos uma vizinhança m -dimensional, e para isso, recorreremos a álgebra linear junto ao conceito de norma. De um modo geral, uma norma num espaço vetorial V é qualquer função real $|\cdot| : \vec{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpra as condições:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad (2.13)$$

$$|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|, \quad (2.14)$$

$$x \neq 0 \longrightarrow |x| > 0. \quad (2.15)$$

As duas últimas são evidentes e a primeira propriedade decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz (vide apêndice C). Há uma infinidade de normas possíveis que se pode considerar. A norma euclidiana é motivada pela fórmula do comprimento de um vetor no plano de coordenadas cartesianas, que se prova com o Teorema de Pitágoras. Para noções geométricas, ela é

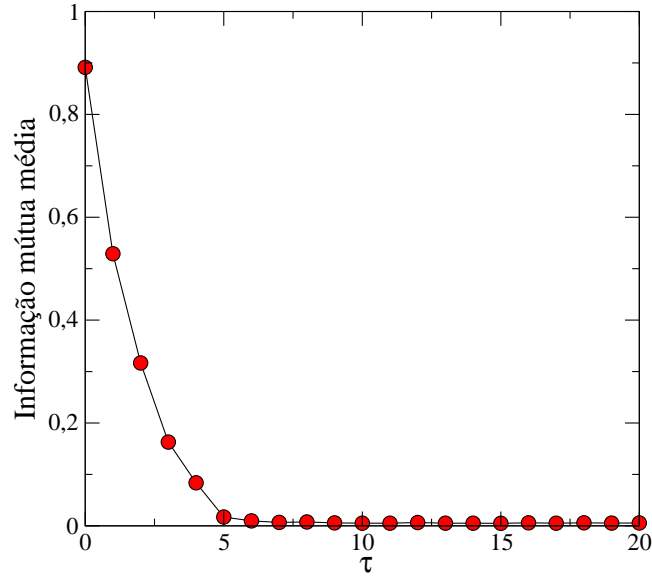


Figura 2.18: Informação mútua média para 3 mapas logísticos acoplados globalmente. Nesse caso, a série temporal também foi dividida em 16 partições.

a mais natural. Por outro lado, há duas outras normas que são consideradas de manipulação formal mais simples, as quais poderemos utilizar em \mathbb{R}^m quando houver conveniência. Elas são:

$$|x_m| = \text{Max.}\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad (2.16)$$

$$|x_s| = |x_1| + \dots + |x_n|. \quad (2.17)$$

A equação 2.16 é conhecida como norma máxima ou infinita. Já a equação 2.17 leva o nome de norma da soma ou norma mínima [27]. A título de comparação, a figura 2.19 estabelece um exemplo geométrico de como essas normas envolvem a vizinhança de um ponto situado na origem 0 dentro do espaço euclidiano R^k . Independente da escolha de uma das três normas, elas possuem uma relação de equivalência, dada pela equação:

$$|x_s| \leq |x| \leq |x_m| \leq n \cdot |x_m|. \quad (2.18)$$

Por equivalente entendemos que, para um determinado estado \vec{x} , temos uma norma com um mesmo valor em outra. Por isso, resolvemos adotar como padrão para todos os nossos cálculos, a norma euclidiana. Caso seja de interesse do leitor, Marwan (2001) [17], fornece uma lista de alguns trabalhos com os três tipos de normas. A referência [27] fornece uma dedução matemática mais rigorosa.

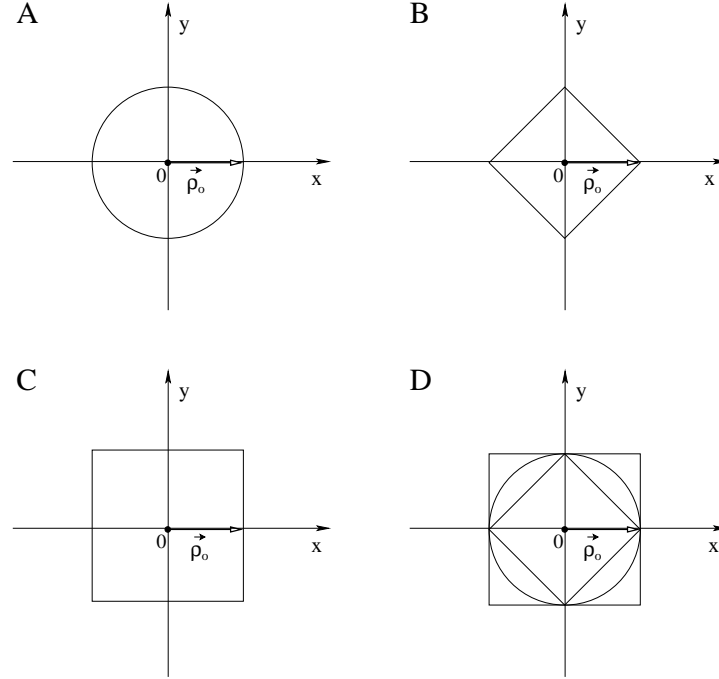


Figura 2.19: (A) Norma euclidiana; (B) Norma da soma; (C) Norma máxima e (D) As três normas citadas.

2.8.5 Janela de Theiler (*Theiler window*)

Outro parâmetro de imersão é a chamada janela de Theiler, ou simplesmente, *Theiler window* (jt). Esta janela exclui os pontos recorrentes ligeiramente paralelos a diagonal principal do gráfico de recorrência, a começar, contando por ela. Segundo Marwan et. al. [28], esses pontos tornam-se prejudiciais no cálculo de invariantes.

O valor que escolhemos para jt corresponde ao número de estruturas diagonais removidas contadas a partir da diagonal principal, por exemplo, para $jt = 1$ removemos apenas a diagonal principal, para $jt = 2$ removemos a diagonal principal e a linha diagonal paralela mais próxima a ela, independentemente se situa-se acima ou abaixo da diagonal principal. Na figura 2.20 podemos comparar dois casos. Em (a) temos o caso de um gráfico de recorrência sem a remoção da janela de Theiler, $jt = 0$, e em (b), utilizamos $jt = 15$, onde fica visível a remoção de um corredor de linhas diagonais (7 diagonais abaixo da diagonal principal, 7 diagonais acima da diagonal principal e a própria diagonal principal). No nosso caso, utilizamos $jt = 1$ para todos os nossos cálculos.

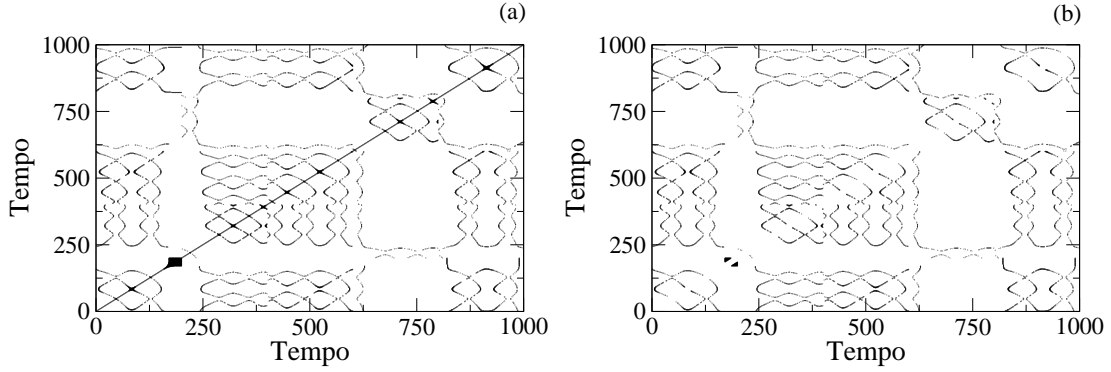


Figura 2.20: Gráfico de recorrência do sistema de Lorenz para parâmetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 25.0$. (a) Com janela de Theiler igual à 0; (b) com janela de Theiler igual à 15. Note que tanto a diagonal principal quanto suas paralelas mais próximas foram excluídas do gráfico de recorrência.

2.9 Medidas de Quantificação

Baseado nos padrões de pequena escala criados por Eckmann et al. [6], já citados na seção 2.8.1, Zbilut e Webber Jr. [29] desenvolveram medidas de complexidade, as chamadas *medidas de quantificação de recorrência*, ou simplesmente MQRs. Essas medidas auxiliam na contabilização de pontos e diagonais, além de relacioná-los através de diagnósticos [29]. A primeira medida proposta é a *taxa de recorrência*, REC:

$$REC = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \vec{R}_{i,j;i \neq j}^{m,\epsilon}, \quad (2.19)$$

que simplesmente conta o número de pontos pretos no gráfico de recorrência. Ela é uma aplicação direta da recorrência de Poincaré, ou seja, compara cada elemento x_i de um gráfico de recorrência com N^2 termos (N^2 provém do fato do gráfico de recorrência ser uma matriz quadrada), em um tempo inicial t_o , com todos os outros elementos x_j em tempos $t = 1, \dots, N - 1$. Se porventura, x_j estiver dentro da vizinhança de x_i , x_j é recorrente à x_i . A soma de todos os x_j recorrentes à x_i é justamente o valor da taxa de recorrência. Alternativamente, a taxa de recorrência também pode ser utilizada como estimador da *soma de correlação* quando o número de pontos é muito grande:

$$RR = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \vec{R}_{i,j}^{m,\epsilon}. \quad (2.20)$$

As próximas MQRs estão relacionadas as linhas diagonais. A primeira delas é o determinismo, DET:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P^\epsilon(l)}{\sum_{i,j}^N \vec{R}_{i,j}^{m,\epsilon}}, \quad (2.21)$$

onde l é o tamanho da estrutura diagonal, $P^\epsilon(l)$ é a probabilidade dessa estrutura diagonal ocorrer dentro do gráfico de recorrência, e l_{min} , é o número mínimo de estruturas diagonais que se deseja contabilizar dentro do gráfico de recorrência (normalmente escolhemos $l_{min} = 2$).

O determinismo mede o número de estruturas diagonais formadas, divididas sobre todo o gráfico de recorrência. Pode ser interpretado como a previsibilidade do sistema, a razão dos pontos recorrentes que formam estruturas diagonais pelos pontos recorrentes de todo o gráfico de recorrência. É importante frisar que essa medida não possui o verdadeiro significado de um processo determinístico, como é visto normalmente nos livros de mecânica clássica [17]. As estruturas diagonais, por sua vez, mostram o intervalo em que um segmento da trajetória evolui paralelamente a outro segmento, ou seja, a trajetória de um segmento visita a mesma região do espaço de fases de outro segmento em tempos diferentes [19]. O comprimento dessa linha diagonal determina o tempo em que esses estados permanecem com essa evolução similar. Baseado nisso, Zbilut e Webber Jr. [29] propuseram uma outra medida, relacionado à média das estruturas diagonais formadas, *o comprimento médio das linhas diagonais*, ou simplesmente L :

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P^\epsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\epsilon(l)}, \quad (2.22)$$

sua interpretação fornece o tempo médio em que dois segmentos da trajetória permanecem evoluindo de forma similar em um estado do sistema. Essa medida difere um pouco do determinismo porque reflete a soma das probabilidades de se encontrar estruturas diagonais no gráfico de recorrência, dividido pela probabilidade apenas, de encontrar diagonais, e não pontos recorrentes, como no determinismo. Ou seja, ela é mais robusta que o determinismo se aplicada a sistemas em que a riqueza da dinâmica se baseia simplesmente em estruturas diagonais (evoluções similares da trajetórias), e não, em pontos recorrentes isolados ou intermitentes.

Podemos utilizar esse raciocínio para interpretar o comprimento máximo, L_{max} :

$$L_{max} = \text{Max}(\{l_i; i = 1, \dots, N_l\}), \quad (2.23)$$

esse por sua vez, merece um tratamento especial, pois Eckmann et. al. [6] sugerem que “o comprimento das linhas diagonais está relacionado com o maior expoente de Lyapunov

positivo do sistema”, se houver algum [6]. Baseado nessa afirmação, foi criada a medida *divergência*:

$$DIV = \frac{1}{L_{max}}, \quad (2.24)$$

que simplesmente é o inverso do comprimento máximo de uma linha diagonal contida no gráfico de recorrência. Contudo, a relação direta entre o expoente de Lyapunov e a divergência é mais complexa do que é citado na literatura [30]. É bem intuitivo pensar que: Se o maior comprimento diagonal de um gráfico de recorrência está associado ao maior tempo em que duas trajetórias evoluem de forma similar, o oposto disso, nos fornece o tempo máximo em que duas trajetórias divergem. Não obstante, não podemos esquecer que estamos trabalhando apenas com trajetórias recorrentes, e por isso, medimos a divergência apenas dessas trajetórias recorrentes.

A medida *entropia* refere-se a entropia de Shannon [26], e fornece a frequência de distribuição das linhas diagonais:

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln p(l) \quad \text{onde} \quad p(l) = \frac{P^\epsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\epsilon(l)}, \quad (2.25)$$

Se formos analisar matematicamente, a entropia sempre fornecerá a mesma informação que o comprimento médio, a menos de um fator escala, devido a multiplicação do logaritmo neperiano. Isso fica evidente quando reescrevemos-na em função de um único comprimento L normalizado por todo o RP:

$$l_1 = \frac{P^\epsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\epsilon(l)}, \quad (2.26)$$

onde l_1 é um único comprimento normalizado. Reescrevendo a expressão da entropia:

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N l_1 \ln l_1, \quad (2.27)$$

logo, é a soma de todos os comprimentos recorrentes reescalados na escala logarítmica. Sua única vantagem em relação ao “ L ” seria fornecer um crescimento de comprimentos recorrentes em uma escala menor. Outras medidas baseadas em diagonais e pontos recorrentes como : *TREND* (tendência) e *RADIO* (razão entre o determinismo e a taxa de recorrência) também foram criadas por Zbilut e Webber Jr., no entanto, não utilizamos-nas nesse trabalho, devido a redundância de resultados.

Em 1999, Gao [31] [32] formulou outros dois diagnósticos, o tempo de recorrência do tipo (T1), e o tempo de recorrência do tipo (T2). Para entendermos a diferença entre eles, bem como suas respectivas vantagens, recorreremos a figura 2.21.

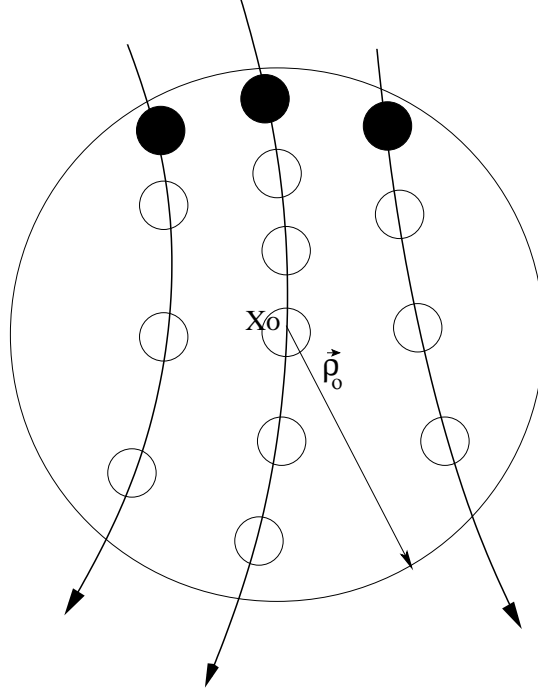


Figura 2.21: Um desenho esquemático do tempo de Recorrência do tipo 2 (T2). Os círculos preenchidos representam os únicos pontos considerados para o cálculo de T2. Figura reproduzida do artigo de Gao (1999) [31].

Suponha que temos uma série temporal escalar composta com $(x(i), i = 1, 2, \dots, N)$ elementos, então, para o cálculo de T2 escolhemos arbitrariamente um elemento (um ponto) de referência nessa série e o denominamos x_0 . Dentre todos os pontos recorrentes à x_0 , ou seja, todos os pontos x_i que correspondam à equação 2.4, escolhemos apenas os primeiros pontos que ultrapassem a vizinhança, que no caso, são os círculos preenchidos da figura 2.21. Todos os outros elementos são eliminados, diferente de T1, onde todos esses pontos dentro da vizinhança, tanto círculos preenchidos quanto vazios, são considerados. Um ponto importante é que, caso o sistema não seja ergódico⁹, T2 pode ter um resultado diferente para cada escolha arbitrária de x_0 (já que para cada x_0 o tempo de retorno pode ser levemente diferente). Gao et. al. [32] revelam que T2 pode ser mais útil na detecção de transições em sistemas com energia baixa. Já T1, mostra-se mais robusto com relação a ruídos e a mudança

⁹Um sistema ergódico, nesse caso, pode ser considerado com um sistema que em tempo infinito visita todas as regiões do espaço de fases.

de parâmetros. Para os sistemas utilizados por nós, tanto T1 quanto T2 fornecem resultados qualitativamente equivalentes, por isso, não nos detivemos a análises mais aprofundadas.

Em 2003, Marwan propôs novas MQRs baseado em linhas verticais, e de uma forma análoga a definição de determinismo (equação 2.21), a razão entre as linhas verticais recorrentes de todo o gráfico de recorrência dividido pelo conjunto de pontos recorrentes contido nele é definida como:

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v P^\epsilon(v)}{\sum_{v=1}^N v P^\epsilon(l)}, \quad (2.28)$$

essa medida é chamada de laminariedade, onde v_{min} é o tamanho mínimo com que se deseja computar uma estrutura vertical. Por exemplo, se utilizarmos $v_{min} = 3$ serão consideradas apenas estruturas verticais que tiverem um tamanho mínimo igual à três estados recorrentes. Para os nossos sistemas consideramos v_{min} sempre igual à dois, ou seja, qualquer evidência mínima de estruturas verticais era sempre levada em consideração. A Laminariedade fornece a quantidade de estruturas verticais do gráfico de recorrência, e representa a ocorrência de estados recorrentes que não mudam no tempo, contudo, sem descrever o comprimento desse estado laminar, que mede justamente o seu tempo de ocorrência. A medida de LAM decresce se no RP tiverem mais pontos singulares do que estruturas verticais [17]. Todavia, se quisermos medir o tempo médio dos estados laminares, utilizaremos o *comprimento médio das verticais*, definido como:

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v P^\epsilon(v)}{\sum_{v=v_{min}}^N P^\epsilon(l)}, \quad (2.29)$$

chamado de tempo de aprisionamento (*trapping time*). E como já havíamos frisado, TT mede o tempo médio que um estado permanece em um estado laminar, um estado que não muda no tempo. Da mesma forma que as estruturas diagonais, também podemos definir o tamanho máximo das estruturas verticais (*maximal length of vertical structures*) do gráfico de recorrência:

$$V_{max} = \text{Max}(\{v_i ; i = 1, \dots, L\}). \quad (2.30)$$

Alguns trabalhos podem ser utilizados como referência para a aplicação desses diagnósticos para dados experimentais, principalmente em medicina, biologia e ciências exatas [33], [34], [35], [36], [37] e [38].

2.10 Detecção de estacionariedade

Em geral, uma medida científica é útil apenas se puder ser reproduzida, pelo menos em princípio. Somente então, podemos afirmar que os números relativos a essa medida correspondem às propriedades do objeto em estudo, chegando até, estimar erros [11]. No caso de séries temporais esta reprodução está associada a duas noções de estacionariedade.

A primeira, a chamada *estacionariedade da forma mais fraca*, requer que todos os parâmetros relevantes à dinâmica do sistema devem ser fixos e constantes durante o processo de medida, (e obviamente, na reprodução desse processo) seja isso para o aparato experimental utilizado ou para o ambiente onde é feita a medida. Além disso, um processo estacionário requer que as distribuições de probabilidade respectivas a ele sejam fixas para todo o intervalo de tempo. Como consequência disso, os momentos estatísticos tais como: média, variância, desvio padrão, etc, também devem permanecer imutáveis através do tempo. Como exemplo de estacionariedade, podemos pensar na probabilidade de jogar um dado e obter o número 3. Todas as tentativas respeitarão a mesma distribuição de probabilidade de ocorrerem, ou seja, as probabilidades não dependerão do tempo. Agora imagine a caminhada aleatória de um bêbado, no entanto propomos que para cada passo dado, o seguinte terá largura maior. Nesse caso, nem todos os parâmetros relevantes do sistema se mantêm constantes (como o tamanho do passo), logo, as distribuições de probabilidades diminuirão com o passar do tempo, causando uma dependência temporal.

Infelizmente, na maioria dos casos (principalmente experimentais), não temos acesso direto ao sistema que produz os sinais medidos, e com isso, não podemos garantir que seus parâmetros são, portanto, fixos e constantes. Disso torna-se necessário, uma segunda noção de estacionariedade, baseada em uma série de dados. Nesse caso, transformamos uma série de dados não-estacionária bem longa, por exemplo, uma série financeira, em pequenos blocos de séries estacionárias. Se esses pequenos blocos apresentarem uma “tendência estacionária”, admitimos esse sinal como estacionário, pelo menos para um determinado intervalo de tempo futuro.

No capítulo 3 faremos testes tanto para o mapa logístico acoplado quanto para o mapa de Bernoulli acoplado, induzindo um tipo de série não-estacionária teórica, corroborando assim, a eficácia de nossa metodologia para séries temporais ruidosas e não-estacionárias.

2.10.1 Janela móvel e Sobreposição (*Overlap*)

A janela móvel (*windows shift*) é um dos métodos mais atuais para a detecção de não-estacionariedade em séries temporais [39]. Para podermos compreendê-la, recorreremos a um exemplo físico simples. Imagine uma frente de onda. Frentes de onda são geralmente

curvas, contudo, uma linha curva dividida em pequenos intervalos assemelha-se bem a um segmento de reta. Se pensarmos na inclinação dessa linha como um parâmetro estimado estatisticamente, variando de tempo em tempo, logo, concluiremos que ele pode ser considerado uma variável não estacionária. Para cada um desses pequenos intervalos, colocamos uma janela. Essa janela evolui sobre o sistema da forma com que é mostrada na figura 2.22, preenchendo toda a série temporal, ou no nosso caso, o gráfico de recorrência.

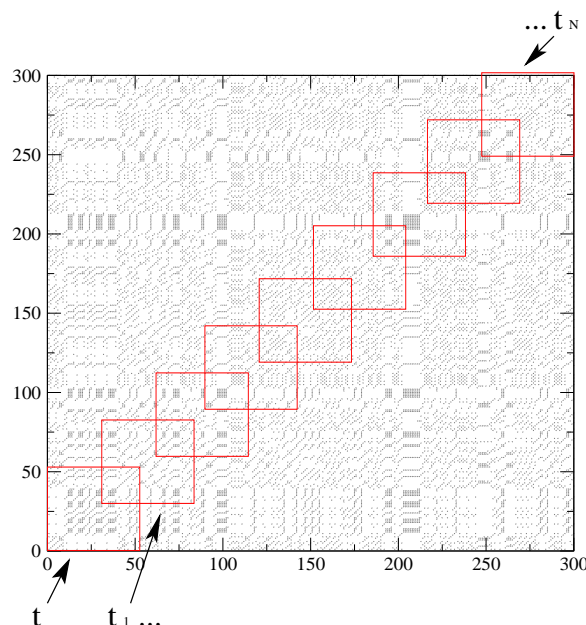


Figura 2.22: Método da janela móvel aplicado a um gráfico de recorrência gerado por uma série temporal do mapa logístico com $r \simeq 3.70$.

Isto nos permite analisar transições de uma forma mais lenta. Por exemplo, na figura 2.22 o subsistema composto pela janela em t , terá parte da sua dinâmica envolvida na análise em t_1 , que por sua vez terá parte em t_2 , e assim sucessivamente até t_n . O que acontece é um envolvimento, uma sobreposição (*overlap*) entre os dados da janela em t , com t_1 . Quanto menor o passo da janela móvel, mais envolvida é a dinâmica do sistema e mais lentamente ocorrerão as transições. No capítulo 3, faremos uma análise de detecção de não-estacionariedade tanto para o mapa logístico acoplado, quanto para o mapa de Bernoulli acoplado, utilizando principalmente os fundamentos aqui explanados.

2.11 Sincronização de Caos

Em um primeiro momento, nossa visão de um sistema sincronizado remete-nos à imagem de dois ou mais sistemas dinâmicos (osciladores, mapas, etc), executando um comportamento

idêntico, para pelo menos uma variável de cada um desses sistemas dinâmicos. Ou seja, para cada tempo t todos os valores da variável dinâmica do sistema 1 denominados como: $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ são idênticos a um segundo conjunto de variáveis dinâmicas de um sistema 2: $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, assim, $x_i(t) = y_i(t)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Para nos confortarmos podemos imaginar as séries $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ como medidas de posição de duas partícula em fluido em movimento, esse tipo de sincronização é chamada sincronização idêntica. A sincronização idêntica (ou total) pode ser interpretada como um caso particular de outro tipo de sincronização, a sincronização geral. Veja essa explicação: Dado um sistema de variáveis dinâmicas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ que determinam os estados de dois subsistemas 1 e 2. A sincronização generalizada ocorre quando existe um função ϕ , tal que, depois de um certo tempo transitório, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \phi(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Isso significa que o estado do sistema dinâmico 1 é completamente determinado pelo segundo sistema dinâmico. Quando a função $\phi = 1$, recaímos novamente no caso da sincronização idêntica.

Existem outros casos de sincronização como: sincronização imperfeita, de amplitude e de retardo, contudo, nesse trabalho o termo sincronização fará alusão somente à sincronização idêntica. Para outros casos, mencionaremos sempre o tipo de sincronização em questão.

Para que possamos entender melhor alguns aspectos de sincronização teremos que levar em conta duas considerações fundamentais. A primeira diz respeito ao caráter geométrico da sincronização, no qual a mesma é definida em função de um hiper-plano de sincronização (que discutiremos a seguir, mas que já pode ser visualizado na figura 2.24). Já a segunda considera os critérios de estabilidade desse hiper-plano. Faremos uso de um exemplo utilizado por Pecora et. al. [40] para explicarmos a primeira consideração.

Imaginem que temos dois sistemas de Lorenz idênticos regidos pela seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, & \frac{dx_2}{dt} &= -\sigma x_2 + \sigma y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1, & \frac{dy_2}{dt} &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2, \\ \frac{dz_1}{dt} &= x_1 y_1 - b z_1, & \frac{dz_2}{dt} &= x_2 y_2 - b z_2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde x , y e z são variáveis de estados, σ , b e r são parâmetros de controle. Seguindo nessa mesma linha enviamos um sinal do primeiro sistema para o segundo, através da variável x_1 . Então, tudo que fizer menção a variável x_2 , no segundo sistema será substituído pelo sinal x_1 do primeiro sistema. Este tipo de construção é denominada *substituição completa*. Então:

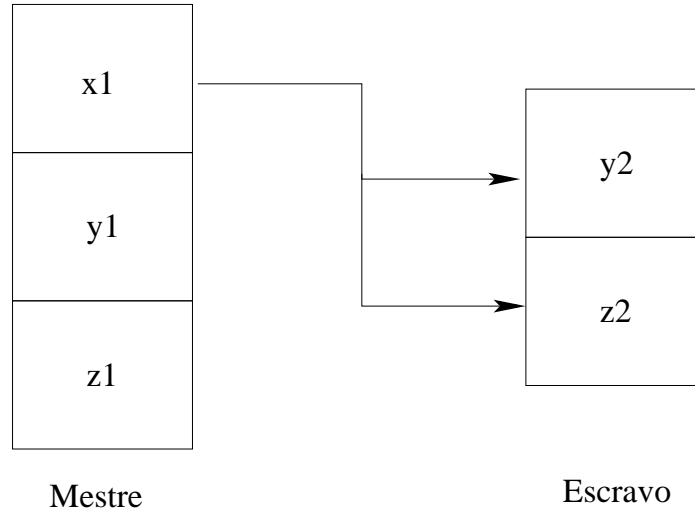


Figura 2.23: Esquema mestre-escravo para sincronização completa.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\
 \frac{dy_1}{dt} &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1, & \frac{dy_2}{dt} &= -x_1 z_2 + r x_1 - y_2, \\
 \frac{dz_1}{dt} &= x_1 y_1 - b z_1, & \frac{dz_2}{dt} &= x_1 y_2 - b z_2.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Com isso, acreditamos que a variável x_1 forçará o segundo sistema. A figura 2.24 mostra esquematicamente o funcionamento desse esquema. Chamamos o primeiro sistema de mestre e o segundo sistema de escravo.

Se inicializarmos esse sistema com condições iniciais arbitrárias, logo veremos que y_2 convergirá para y_1 e z_2 convergirá para z_1 . Depois de um tempo o movimento terá duas igualdades $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$. As componentes y e z de ambos os sistemas permanecem iguais mesmo que o sistema evolua, ou seja, é um caso de sincronização idêntica.

Para termos uma idéia de como a geometria do atrator caótico sincronizado se parece no espaço de fase, usaremos o seguinte exemplo. Plotaremos as variáveis x_1 , y_1 e y_2 . Desde que $y_2 = y_1$, vemos que o movimento mantêm-se no plano definido pela igualdade. Da mesma forma, o movimento permanece no plano definido por $z_2 = z_1$, quando a igualdade é verdadeira. Tais igualdades definem um espaço de fase 3-dimensional.

Podemos ver a projeção deste plano (em três dimensões) na figura 2.24. Este hiper-

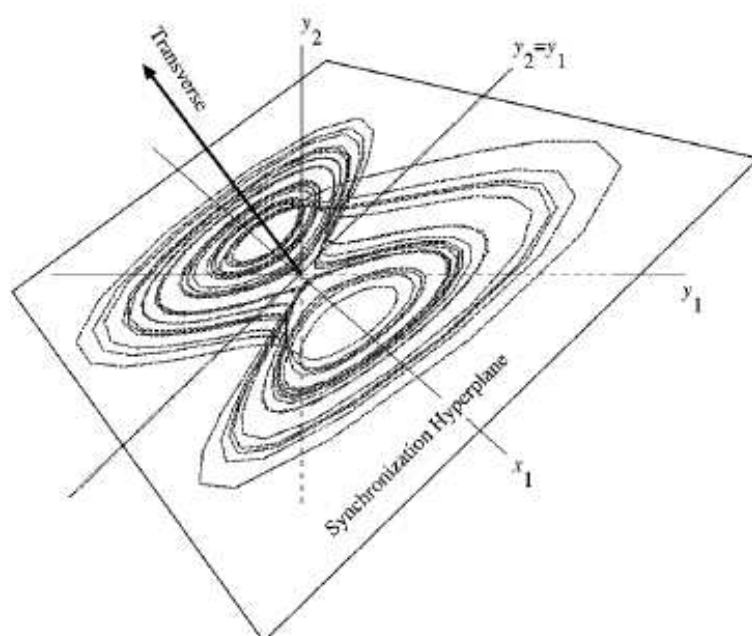


Figura 2.24: Uma projeção do hiperplano de sincronização para o Atrator de Lorenz. Figura retirada de [40].

plano também pode ser chamado de *Variedade de Sincronização*. A restrição do movimento ao hiperplano e a existência da sincronização idêntica requerem apenas que a variedade de sincronização seja invariante, ou seja, qualquer condição inicial inicializada dentro dessa variedade deve permanecer sobre ela mesmo que o sistema rotacione ou translacione.

2.12 Espectro de Lyapunov a tempo infinito

2.12.1 Mapas unidimensionais

Uma das principais características de um sistema caótico é possuir dependência sensível as condições iniciais, embora isso não sirva como uma prova rigorosa de caos [3]. Isso significa que trajetórias inicialmente muito próximas no espaço de fase, em um tempo futuro podem estar bem afastadas, onde “bem” nesse contexto, caracteriza uma taxa de afastamento exponencial.

O expoente de Lyapunov mede justamente isso, a taxa exponencial média com que duas trajetórias se afastam. Para entendermos matematicamente, analisemos o mapa unidimensional e a figura 2.25:

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (2.33)$$

Sejam x_0 e y_0 , duas condições iniciais separadas por uma pequena distância δ_0 , tal que $\delta_0 \rightarrow 0$, ou seja $y_0 - x_0 = \delta_0$, conforme a figura 2.25. Vamos supor que após n iteradas, com $n \rightarrow \infty$, a separação entre as evoluções dos mapas seja $y_n - x_n = \delta_n$. Como nosso sistema é caótico, sabemos que δ_n se afasta exponencialmente em relação à δ_0 , ou seja:

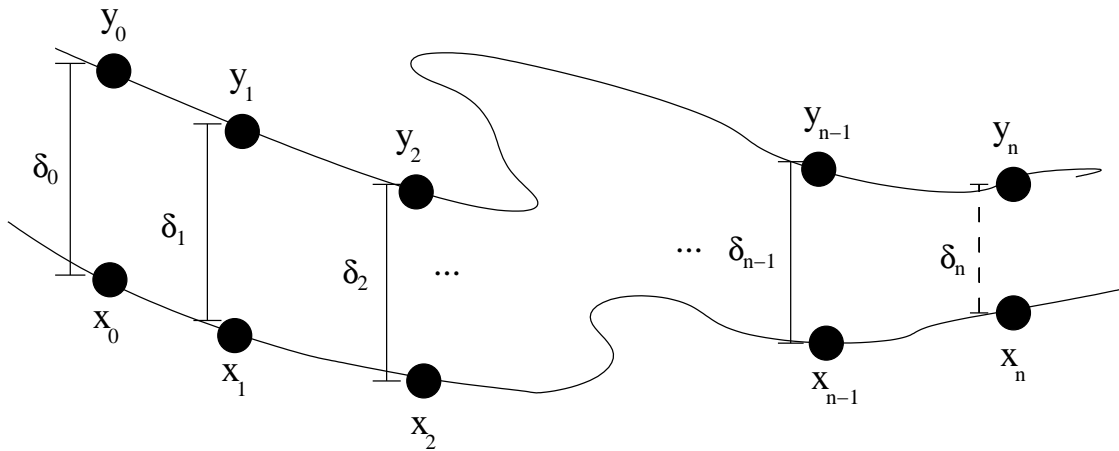


Figura 2.25: Representação gráfica do expoente de Lyapunov.

$$|\delta_n| = |\delta_0|e^{\lambda n}, \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

onde λ é definido como *Expoente de Lyapunov*. Observe que se:

- $\lambda < 0 \Rightarrow |\delta_n| \rightarrow 0 \Rightarrow$ As iteradas de y_0 e x_0 aproximam-se (convergem) com o passar do tempo.
- $\lambda > 0 \Rightarrow |\delta_n| > |\delta_0| \Rightarrow$ As iteradas de y_0 e x_0 afastam-se (divergem) com o passar do tempo.

Aplicando o \ln em ambos os lados da equação 2.34, utilizando algumas propriedades dos logaritmos, e isolando λ temos:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{y_n - x_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{g^{(n)}(x_0 + \delta_0) - g^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right|, \quad (2.36)$$

a quantidade dentro do módulo é justamente a definição de derivada, logo:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dg^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad (2.37)$$

aplicando a regra da cadeia na derivada:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}. \quad (2.38)$$

Concluimos aplicando o limite em n :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right) \right]. \quad (2.39)$$

Se aplicarmos para um mapa N-dimensional, definimos:

$$DG^{(n)}(\vec{X}_0) = \prod_{i=0}^{n-1} DG(\vec{X}_i), \quad (2.40)$$

onde $DG^{(n)}(\vec{X}_0)$ é a matriz resultante do produto de n -matrizes Jacobianas avaliadas cada uma nos n -pontos calculados pelo mapa, partindo da condição inicial $(\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_{n-1})$. Definimos a matriz \mathcal{DG} ¹⁰ como sendo:

¹⁰A matriz \mathcal{DG} fornece os módulos dos autovalores da matriz $DG^n(\vec{X}_0)$ (mesmo que estes sejam complexos).

$$\mathcal{DG} = \left| DG_{(\vec{X}_0)}^m \cdot DG_{(\vec{X}_0)}^{(n)T} \right|^{\frac{1}{2n}}, \quad (2.41)$$

onde $DG_{(\vec{X}_0)}^{(n)T}$ é a matriz transposta de $DG_{(\vec{X}_0)}^n$. Utilizando propriedades algébricas [1], escrevemos o conteúdo dentro dos colchetes na forma dos autovalores da matriz \mathcal{DG} , logo:

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln |\xi_k| \right). \quad (2.42)$$

onde ξ_k é um autovalor da matriz \mathcal{DG} , e λ_k o expoente de Lyapunov associado a este autovalor, com $k = (1, 2, 3, \dots, N)$. Temos então para um mapa $N - dimensional$, N -autovalores da matriz \mathcal{DG} , portanto teremos N expoentes de Lyapunov. Em função de calcularmos essa expressão considerando o tempo até infinito, dizemos que são “*expoentes de Lyapunov à tempo infinito*”, ou simplesmente expoente de Lyapunov. Na prática, um programa de computador nunca atingirá um tempo infinito, por isso, consideramos um tempo muito longo, para o qual o espectro de Lyapunov mantenha-se praticamente inalterado e invariante.

O estudo dos expoentes de Lyapunov fornece informações importantes à respeito do comportamento caótico de um sistema:

- Se todos os $\lambda_k \leq 0$, o sistema é regular, com dinâmica periódica ou quasi-periódica.
- Se um dos $\lambda_k > 0$, o sistema apresenta comportamento caótico.
- Se mais de um $\lambda_k > 0$, o sistema é denominado hipercaótico.

Na análise dos expoentes de Lyapunov, a seguinte hierarquia deve ser respeitada:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \lambda_k \geq \lambda_{k-1} \quad (2.43)$$

Grande parte do texto aqui presente foi extraído das referências [1] e [11] e principalmente de [8]. Na referência [41], estão feitas todas as passagens intermediárias para a dedução dos expoentes de Lyapunov, que por simplicidade, aqui, foram simplesmente argumentadas. Para os cálculos dos expoentes de Lyapunov utilizamos os algoritmos de Wolf et. al. [42].

2.12.2 Estabilidade do Hiperplano de sincronização

Nosso objetivo agora é vincular a interpretação do expoente de Lyapunov como referência na detecção de caos (abordado na seção anterior) em conjunto com a medida da perda de estabilidade transversal do hiperplano de sincronização. Se pensarmos em λ como a taxa

de divergência local, podemos dizer que um expoente de Lyapunov transversal negativo, significa que trajetórias transversais estão convergindo, e por sua vez, se aproximando da *variedade* de sincronização.

Para o caso sincronizado, teremos um ou mais expoentes de Lyapunov positivos na direção longitudinal da variedade de sincronização (corroborando que a dinâmica nesse direção é caótica) e todos os outros expoentes negativos ou zero (sem divergência transversal). A partir desse momento toda dinâmica do sistema permanece dentro do plano de sincronização, que por sua vez é invariante por definição, com isso, o sistema mantém-se sincronizado.

Para quem quiser ver uma análise qualitativa mais resumida sobre todos os tipos de sincronização mencionados aqui nesse trabalho (idêntica, fase e retardo) indicamos a referência [43]. Caso o interesse seja um aprofundamento na técnica de sincronização, a referência [40] fornece uma grande variedade de esquemas e montagens para obter os distintos tipos de sincronização.

2.13 Tipos de Acoplamentos

2.13.1 Redes de Mapas Acoplados

As redes de mapas acoplados são uma classe de modelos dinâmicos que consideram o espaço e o tempo de forma discreta, e as variáveis de estado (uma densidade populacional, por exemplo) de cada sítio como contínuas. O estado dinâmico evolui a passos discreto de tempo e a topologia do mesmo, é representado através de uma grade (como na figura 2.26). Cada ponto dessa grade (um sítio da rede) contém uma entidade local que possui uma lei de evolução determinística.

Esta lei de evolução é definida por um mapa, o qual podemos escrever, na ausência de acoplamento, da seguinte maneira:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i), \quad (2.44)$$

esse mapa representa uma rede unidimensional com N sítios rotulados pelo índice espacial i , com $i = 1, 2, \dots, N$. Em cada sítio a variável de estado é escrita como x_n^i , onde n denota o tempo discreto e $f(x)$ é uma função não-linear. Se desejarmos acoplar nosso sistema, devemos levar em consideração qual o tipo de interação a rede terá com os seus vizinhos, no caso, se for de forma global, todos os elementos da rede acoplam entre si, sendo que a dinâmica de um único sítio, é determinada também, por todos os elementos da rede, como

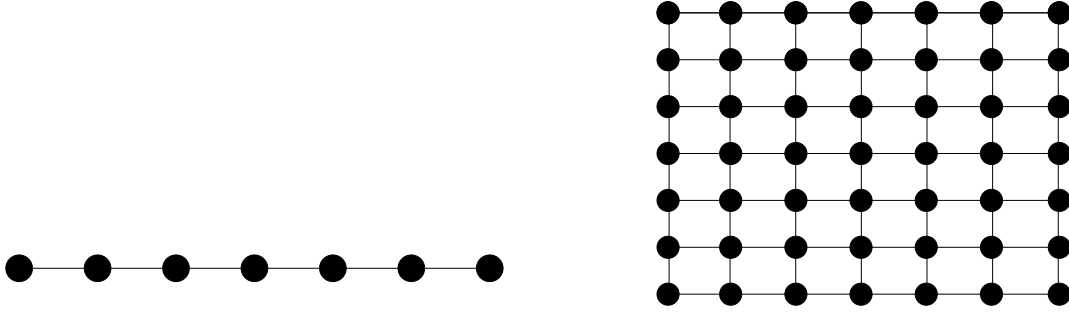


Figura 2.26: À esquerda, uma rede unidimensional. À direita, uma gradeamento de uma rede bidimensional.

o próprio nome sugere. Se for local, a dinâmica de cada sítio depende, normalmente, dos seus vizinhos mais próximos, e não de todos os elementos da rede, ou seja, o acoplamento local é aquele que a dinâmica de um sítio é determinada pelas variáveis de estado dos sítios vizinhos (normalmente os mais próximos). Nesse trabalho, para todos os mapas acoplados, utilizaremos acoplamento global. Para quem tiver interesse na dinâmica de acoplamentos locais, uma boa referência é Crutchfield e Kaneko, 1987 [44].

Como havíamos frisado, no acoplamento global a dinâmica de um sítio i da rede não depende apenas de si mesma, mas também da dinâmica de todos os outros sítios da rede. De acordo com a maneira com que os outros sítios da rede influenciam o sítio i , podemos caracterizar tipos de acoplamento global. Para tanto, podemos citar alguns exemplos [45]:

- Acoplamento global linear

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1; j \neq i}^N f(x_n^{(j)}); \quad (2.45)$$

- Acoplamento global futuro

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}); \quad (2.46)$$

- Acoplamento global do tipo exponencial

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \epsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp(-c|i - j|)f(x_n^{(j)}); \quad (2.47)$$

- Acoplamento global do tipo gaussiano

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \epsilon \sum_{j=1; j \neq i}^N \exp[-|i - j|^2/\Delta]f(x_n^{(j)}); \quad (2.48)$$

onde n denota o tempo discreto, N o número de mapas acoplados na rede, $f(x)$ representa a função não-linear, ϵ é o parâmetro de acoplamento, e i e j representam a posição dos sítios na rede. Na equação 2.47, c é uma constante que controla o decaimento da exponencial e na equação 2.48, Δ é a largura da gaussiana. Tanto para o acoplamento do tipo exponencial quanto para o acoplamento do tipo gaussiano, o valor da intensidade do acoplamento ϵ cai de uma forma exponencial e gaussiana, respectivamente, conforme nos afastamos do sítio i . Já para os acoplamentos global futuro e o global linear, a dinâmica do sítio i é determinada pelo campo médio de todos os sítios da rede com uma diferença sutil entre eles, apenas o fator de normalização do acoplamento. No primeiro, global futuro, a contribuição de todos os sítios da rede em relação ao sítio i , representado pelo segundo termo na equação 2.46, leva em conta também a dinâmica individual do sítio i , por isso a contribuição é dividida entre todos os N termos da rede. No segundo, global linear, a contribuição do segundo termo da equação 2.45, não leva em conta a contribuição do sítio i , por isso é dividida entre os $N - 1$ termos restantes da rede.

Para esse trabalho, resolvemos utilizar redes de mapas com acoplamentos global linear, ou seja, investigamos a dinâmica de cada sítio i acoplado com a dinâmica dos outros sítios da rede.

2.13.2 Redes de EDO Acopladas

Da mesma forma que acoplamos uma rede de mapas, podemos acoplar um conjunto de equações diferenciais ordinárias. No nosso caso, utilizamos um acoplamento da forma mais simples, bi-direcional em apenas uma variável dinâmica para cada sistema de equações diferenciais autônomas:

Sistema 1:

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, x_3), \quad (2.49)$$

$$\dot{x}_2 = g(x_1, x_2, x_3) + \epsilon(x_5 - x_2),$$

$$\dot{x}_3 = h(x_1, x_2, x_3). \quad (2.50)$$

Sistema 2:

$$\dot{x}_4 = f(x_4, x_5, x_6), \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= g(x_4, x_5, x_6) + \epsilon(x_2 - x_5), \\ \dot{x}_6 &= h(x_4, x_5, x_6). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Quando o parâmetro de acoplamento $\epsilon = 0$, temos o caso desacoplado. A medida que ϵ aumenta, ou seja, $\epsilon \neq 0$, o sistema se acopla, até alcançar um valor $\epsilon_{critico}$ quando $x_1(t) = x_4(t)$. A partir daí, o sistema sincroniza e, caso não hajam perturbações transversais, o sistema permanece sincronizado e preso à *variedade* de sincronização.

2.14 *Softwares* utilizados

Todas as séries temporais foram geradas por nós em linguagem fortran 77/90, e compiladas com o *software* gfortran. Em contrapartida, alguns programas foram extras foram utilizados para manipulação dessas séries temporais, construção dos RPs e suas análises de quantificação. A descrição de cada programa varia de acordo com a utilidade estabelecida por nós. Nessa seção faremos um breve resumo de alguns desses *softwares*:

- *CRP Toolbox 5.5 - (Matlab) (por Norbert Marwan)*

Programa para criação de Recurrence Plots (RPs) e análises de quantificação (baseado tanto em estruturas diagonais e verticais) totalmente grátis, sendo que a única solicitação seria a citação do autor. Possui ferramentas extras de dinâmica não-linear para análise de séries temporais. Sua plataforma é independente (para Matlab), podendo ser utilizado tanto na forma gráfica quanto em modo texto. A sua desvantagem é que possui restrições quanto ao tamanho da série de dados. Onde procurar: <http://www.recurrence-plot.tk>

- *Commandline Recurrence Plots - (Unix) (por Norbert Marwan)*

Tal como o CRP Toolbox é gratuito e possibilita a criação de RPs e suas análises de quantificação. Não possui restrição quanto ao tamanho da série de dados. Disponível para Unix/Linux (shell script). Onde procurar: <http://www.recurrence-plot.tk>

- *Tisean 3.01 - (Unix/Linux/Windows) (por R. Hegger e H. Kantz)*

Software para análise de séries temporais com métodos baseados na teoria de dinâmica não-linear. Código fonte aberto (C+ e Fortran 77) com códigos binários executáveis para Linux e Windows. Utilizado somente em linha de comando, sem interface gráfica e muito bem documentado. Onde procurar: <http://www.mpi-pks-dresden.mpg.de/~tisean/>

Capítulo 3

Gráficos de recorrência para mapas e seus resultados

3.1 Aplicações para mapas unidimensionais

Geralmente quando queremos estudar o comportamento de algo desconhecido, procuramos os exemplos mais simples. Se tratando de sistemas dinâmicos, os mapas unidimensionais são os modelos mais simples para investigação de qualquer ferramenta ou fenômeno. Nessa seção, exploraremos a dinâmica de dois mapas unidimensionais muito popularizados pelos pesquisadores em dinâmica não-linear: o mapa logístico [7] e o mapa de Bernoulli [1]. Para esses sistemas, comparamos diagnósticos já conhecidos da teoria de sistemas dinâmicos como o diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov com as medidas de quantificação de recorrência. Em virtude dessa comparação, fomos capazes de investigar quais comportamentos são visíveis com as medidas de quantificação de recorrência, e quais são menos evidentes.

3.1.1 O Mapa Logístico

Popularizado por May (1976) [7], o mapa logístico pode ser visto como o modelo ecológico (idealizado) mais simples para estudar a variação anual da população em uma espécie de insetos. Podemos escrevê-lo matematicamente como:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (3.1)$$

onde:

- x_n é um número entre 0 e 1, que representa a população de insetos em um ano n , portanto, x_0 representa a população inicial (ano 0).

- r é um número positivo inteiro, que representa um fator de normalização, tanto para a taxa de crescimento, como para a taxa de mortalidade dessa população de insetos.

Para entendermos como funciona a dinâmica desse mapa, nos apoiaremos em outra função muito parecida com o mapa logístico, a função $f(x_{n+1}) = rx_n$. A evolução da dinâmica de $f(x_{n+1})$, para esta ou qualquer que seja a função $f(x_{n+1})$, a partir de uma condição inicial x_0 é feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1 &= rf(x_0) \\ x_2 &= rf(x_1) = f(f(x_0)) \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= rf(x_{n-1}) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0) \dots))}_{n \text{ vezes}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

de uma forma mais compacta:

$$x_n = rf^{[n]}(x_0). \tag{3.4}$$

Agora, digamos que x_0 (valor inicial da população) é maior do que zero e r é maior do que 1.0, parece claro que para um n grande a população crescerá deliberadamente sem controle algum. Este tipo de expansão, em que a população é multiplicada por um fator constante por unidade de tempo, é chamado crescimento exponencial.

O fato é que, tanto a sociedade de insetos, quanto qualquer outra sociedade, possuem um quantia finita de recursos (alimento, etc) em oposição ao conceito de crescimento exponencial da população. Ou seja, em alguma época os recursos naturais se tornarão escassos, fazendo com que o crescimento populacional seja mais lento e muitas vezes bem menor do que exponencial.

Em outras palavras, embora a regra $f(x_n) = rx_0$ esteja correta para um certo intervalo populacional, ela perde a aplicabilidade em outros intervalos. Por isso a função $f(x_n) = rx_0$ merece uma pequena correção, tornando-se $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Assim, se analisarmos o mapa logístico veremos que: quando o fator $(1 - x)$ esta próximo de 1 (um), ele assemelha-se a função $f(x_n) = rx_0$. Contudo, se a população x está longe de zero, então o mapa logístico é proporcional ao produto de x pelo estado remanescente $(1 - x)$. Este produto é justamente quem causa a diminuição populacional criando um efeito não-linear no modelo.

Para visualizarmos o quanto a população cresce em função do parâmetro r , utilizamos uma ferramenta de dinâmica não-linear conhecida como *Diagrama de Bifurcações* (figura

3.1). Observe que para alguns valores de r existem pontos de bifurcação como, por exemplo, em: $r = 3.0$, $r \simeq 3.45$, $r \simeq 3.54$, $r \simeq 3.564$. Para entendermos o que significam esses pontos, em função da nossa dinâmica populacional, peguemos $r = 3.0$. Para valores anteriores de r , $r = 2.8$ por exemplo, a população cresce exponencialmente estabilizando em um valor populacional por volta de $x_n \simeq 0.64$. A partir do momento que atingimos $r = 3.0$, a nossa população de insetos se duplica, variando entre dois valores populacionais muito próximos de $x_n \simeq 0.63$ e $x_n \simeq 0.70$, como podemos observar na figura 3.1, até atingirmos o valor $r \simeq 3.45$, quando a população de insetos varia agora, entre quatro valores. E assim, esse processo de duplicações vai acontecendo sucessivamente produzindo infinitas e contínuas duplicações até chegarmos ao valor $r_\infty \simeq 3.57$, chamado ponto de acumulação das cascatas de bifurcação, quando não conseguimos distinguir mais esse processo de duplicação, e denominamos o começo do regime caótico. A partir daí, as trajetórias começam a depender sensivelmente das condições iniciais, ou falando de uma forma melhor, a população de insetos começa a depender sensivelmente do número de insetos iniciais, e esse regime continua até $r = 4$, quando a população de insetos tende à infinito.

Podemos observar que, para $r_\infty < r \leq 4$, no regime caótico, existem *janelas* correspondendo a sub-regiões onde a população de insetos varia de forma periódica (se olharmos na figura 3.1, essas janelas ocorrem para valores de $r \simeq 3.626$, $r \simeq 3.737$ e $r \simeq 3.828$). Se falarmos em termos de dinâmica não-linear, essas *janelas* são caracterizadas por órbitas de período ímpar e sofrem bifurcações, até quando se fundem novamente em uma banda caótica. O período de cada janela é contado pelo número de órbitas visíveis a partir do momento que a janela é criada. Por exemplo em $r \simeq 3.626$, temos uma *janela de período 3*.

Em virtude da simplicidade do mapa logístico, adicionado com sua analogia a dinâmica populacional (um “possível” sistema real), trataremos-lo como primeiro exemplo para a aplicação das *medidas de quantificação de recorrência (MQR)*. Procederemos da seguinte maneira: Geraremos 200 séries temporais com valores de r distintos, ou seja, 200 séries temporais diferentes. Cada uma dessas séries temporais terá um valor fixo de r para 5000 tempos de iteração do mapa logístico. Em seguida, particionaremos esses 5000 tempos de iteração de cada série, em 5 (cinco) novas séries de 1000 tempos e, para cada uma dessas novas séries, será calculado as medidas de quantificação de recorrência (MQR). Com o término desses cálculos obteremos 5 valores de MQR originados de 5 séries de 1000 pontos. Faremos a média aritmética desses 5 valores proporcionando um valor médio, o qual originará apenas 1 ponto na figura 3.2. Repetiremos esse processos 200 vezes, recuperando as 200 séries temporais distintas do começo do processo. Este procedimento pode ser visualizado de forma esquemática na figura 3.3, e o resultado conferido na figura 3.2.

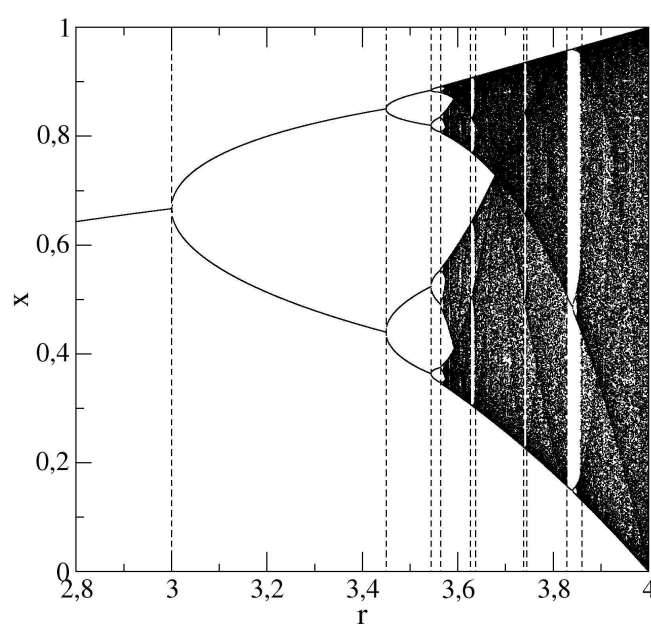


Figura 3.1: Diagrama de bifurcações para o mapa logístico. Para realização da figura foram utilizados os seguintes parâmetros: 10.000 pontos removidos de transiente, 120 tempos de iteração do mapa para cada passo de $r = 10^{-3}$.

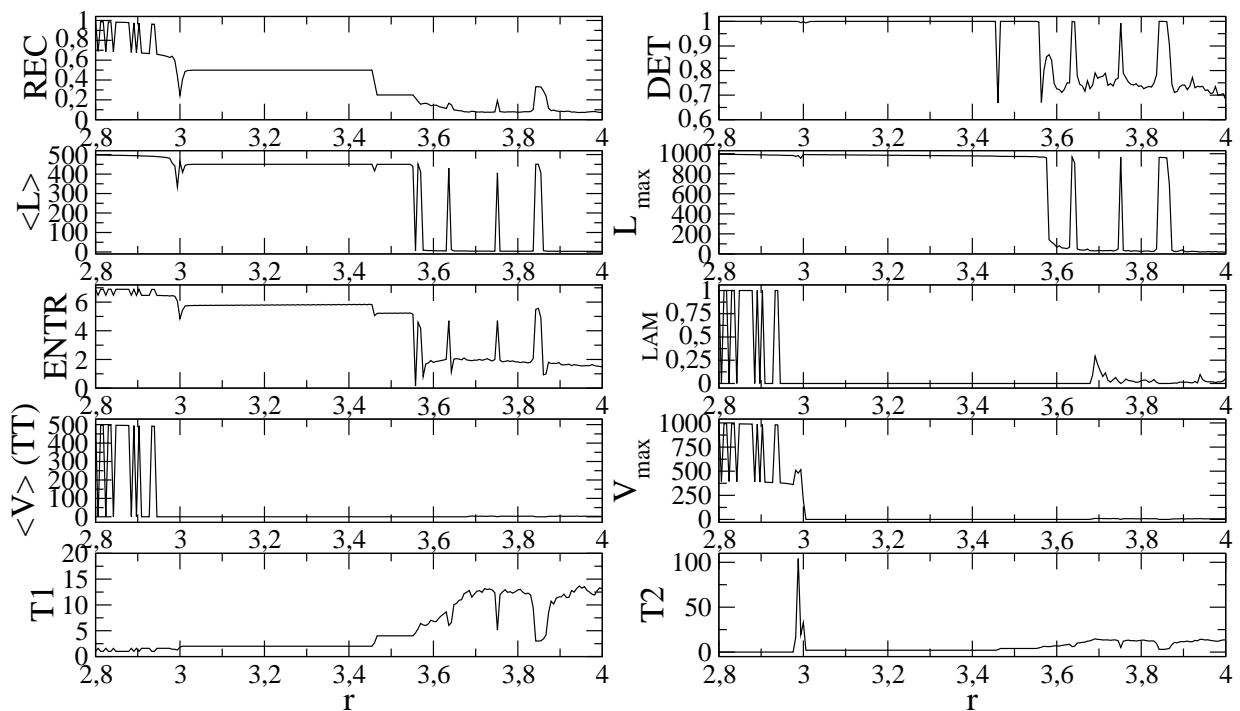


Figura 3.2: RQA para o mapa logístico. Para realização da figura foram utilizados os seguintes parâmetros: 5000 tempos de iteração do mapa para cada valor de r , sem remoção de transiente (destacam mais as bifurcações). Além disso utilizamos alguns parâmetros de imersão: vizinhança $\rho_0 = 0.10$, dimensão de imersão $m = 1$, retardo $\tau = 1$.

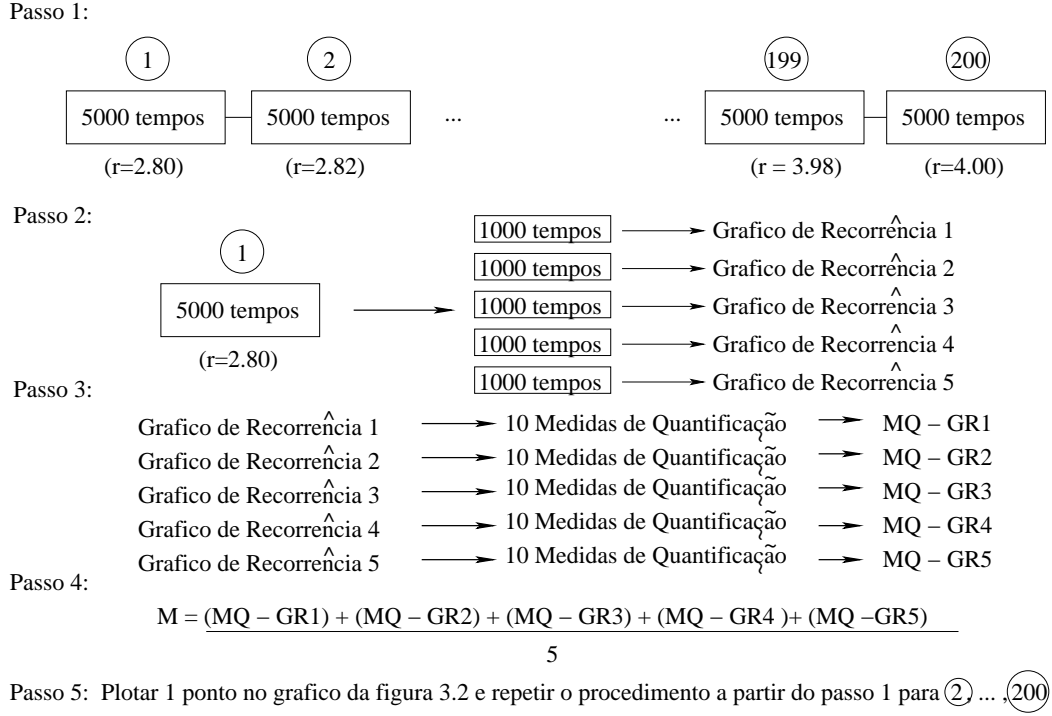


Figura 3.3: Figura explicativa do procedimento utilizado para a aplicação do RQA no mapa logístico.

Olhando na figura 3.2 vemos que todos os diagnósticos do RQA apresentam alguns sintomas em comum. Se compararmos o diagrama de bifurcações (figura 3.1) vemos que tanto ele quanto todos os diagnósticos do RQA evidenciam fortemente bifurcações via duplicação de período [1]. Essa afirmativa pode ser visualizada na figura 3.4 onde comparamos o diagrama de bifurcações diretamente com a taxa de recorrência (REC) para os valores de $r = 3.00$ (transição de órbitas de período 1 para período 2), $r = 3.45$ (Transição de órbitas de período 2 para período 4) e $r = 3.54$ (Transição de período 4 para período 8). As oscilações na taxa de recorrência (REC) para valores anteriores à $r = 3.00$ ocorrem devido a dinâmica transiente, que não foi removidas do sistema em função do ênfase que ela proporciona as bifurcações. No entanto, algumas características revelam-se específicas de cada diagnóstico, por exemplo a entropia (ENTR). Segundo a teoria de informação de Shannon [26], a predizibilidade de uma órbita diminui proporcionalmente com o aumento da entropia. Ou seja, esperamos valores altos de entropia em conjuntos periódicos e valores baixos para conjuntos caóticos. Isso pode ser confirmado se verificarmos a figura 3.2.

Outra previsão interessante está a cerca da taxa de recorrência (REC). Podemos notar que a partir de um valor crítico de r ($r_{critico} \simeq 3.57$, onde o sistema já se encontra em um estado caótico) a taxa de recorrência mostra uma relação direta com o número de órbitas periódicas imersas em uma janela periódica (vide novamente a figura 3.4). Se dividirmos o

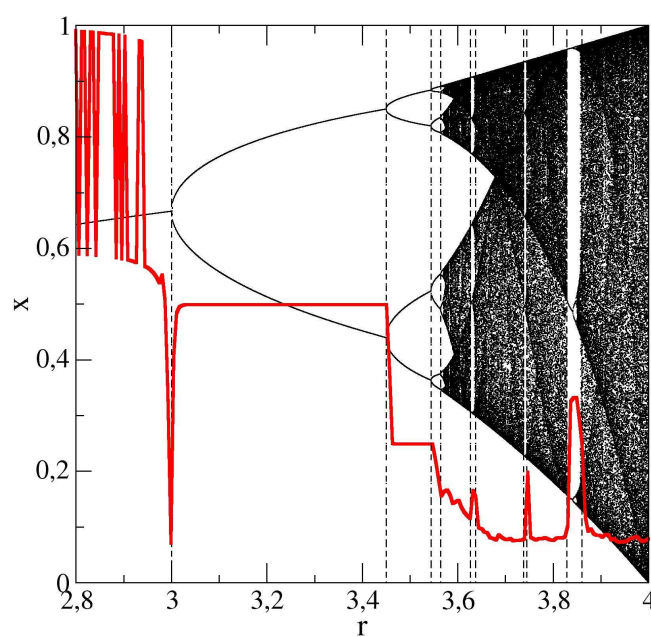


Figura 3.4: Comparação do diagrama de bifurcações para o mapa logístico com sua respectiva taxa de recorrência. Nem todas as bifurcações ficam evidêntes a taxa de recorrência devido a resolução de r .

valor máximo da variável x pela magnitude dos valores de REC dos três “picos” (situados em $r \simeq 3.63$, $r \simeq 3.75$ e $r \simeq 3.84$) mais relevantes após $r_{critico}$, obtemos justamente o período das janelas periódicas. Por exemplo, se retirarmos da figura 3.2 o valor da taxa de recorrência para um desses picos ($r = 3.84$) obtemos $REC \simeq 0.33$. Se dividirmos o valor máximo da variável x ($x_{max} = 1.0$) por este valor da taxa de recorrência (REC), ou seja, $\frac{x_{max}}{REC}$ obtemos: $\frac{1.0}{0.33} \simeq 3.0$ janelas. No entanto, esse raciocínio só funciona para $r > r_{critico}$.

3.1.2 O Mapa de Bernoulli

O Mapa de Bernoulli é uma consequência de um processo conhecido em estatística como *processo de Bernoulli*. Qualquer sistema envolvido nesse processo é composto de uma seqüência de números randômicos independentes com probabilidades constantes. Embora constantes, os valores dessas probabilidades, as quais chamaremos de p e, que terão uma relação direta com um outro parâmetro do sistema $p = \frac{1}{\beta}$, podem ser escolhidas arbitrariamente, de acordo com o sistema físico que se queira modelar. Por exemplo, se escolhermos $\beta = 3$ teremos a seguinte equação:

$$x_{n+1} = \beta x_n MOD 1 \quad \text{onde } x \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

O $MOD 1$ funciona como um filtro, o qual dará riqueza a dinâmica (e nesse caso, a não linearidade ao mapa, que é dito linear por partes), para manter os valores de x_{n+1} e x_n entre o intervalo $[0, 1]$. Toda vez que x_{n+1} for maior que 1, a função $MOD 1$ subtrairá o valor 1 dessa variável até, que ela volte a pertencer novamente ao intervalo $[0, 1]$. Por exemplo, se lançarmos uma condição inicial $x_0 = 0.6$ com o parâmetro $\beta = 3$, o mapa retornará $x_{n+1} = 1.8$. Se aplicarmos $MOD 1$ em x_{n+1} teremos que, $x_{n+1} = 0.8$. Agora, se dermos uma condição inicial diferente, $x_0 = 0.8$, ainda com $\beta = 3$, teremos $x_{n+1} = 2.4$. Para esse caso precisamos aplicar o $MOD 1$ duas vezes para que x_n fique entre $[0, 1]$, obtendo assim, $x_{n+1} = 1.4$ e na seqüência $x_{n+1} = 0.4$. Partindo dessa discussão podemos dividir o sistema em três intervalos: aqueles que não precisam da aplicação do $MOD 1$, aqueles que necessitam de apenas uma aplicação do $MOD 1$ e finalmente, os que precisam de duas aplicações do $MOD 1$. Ou seja:

$$x_{n+1} = \beta x_n \Rightarrow 0 > x_n \geq \frac{1}{3}, \quad (3.6)$$

$$x_{n+1} = \beta x_n \Rightarrow \frac{1}{3} > x_n \geq \frac{2}{3}, \quad (3.7)$$

$$x_{n+1} = \beta x_n \Rightarrow \frac{2}{3} > x_n \geq 1. \quad (3.8)$$

Para nos familiarizarmos um pouco, podemos imaginar esse conjunto de equações (eqs. 3.6, 3.7 e 3.8) como representações das faces de um dado em um jogo de azar. Para esse caso, o nosso dado precisa ser levemente modificado. Ele necessita ter duas faces iguais (ou seja, terá apenas 3 números) para que cada equação represente a probabilidade de obtermos apenas um único número no dado. Na figura 3.5 mostramos como é a ação desse mapa para mil tempos de iteração, com $\beta = 3.0$, com ênfase aos dez primeiros tempos.

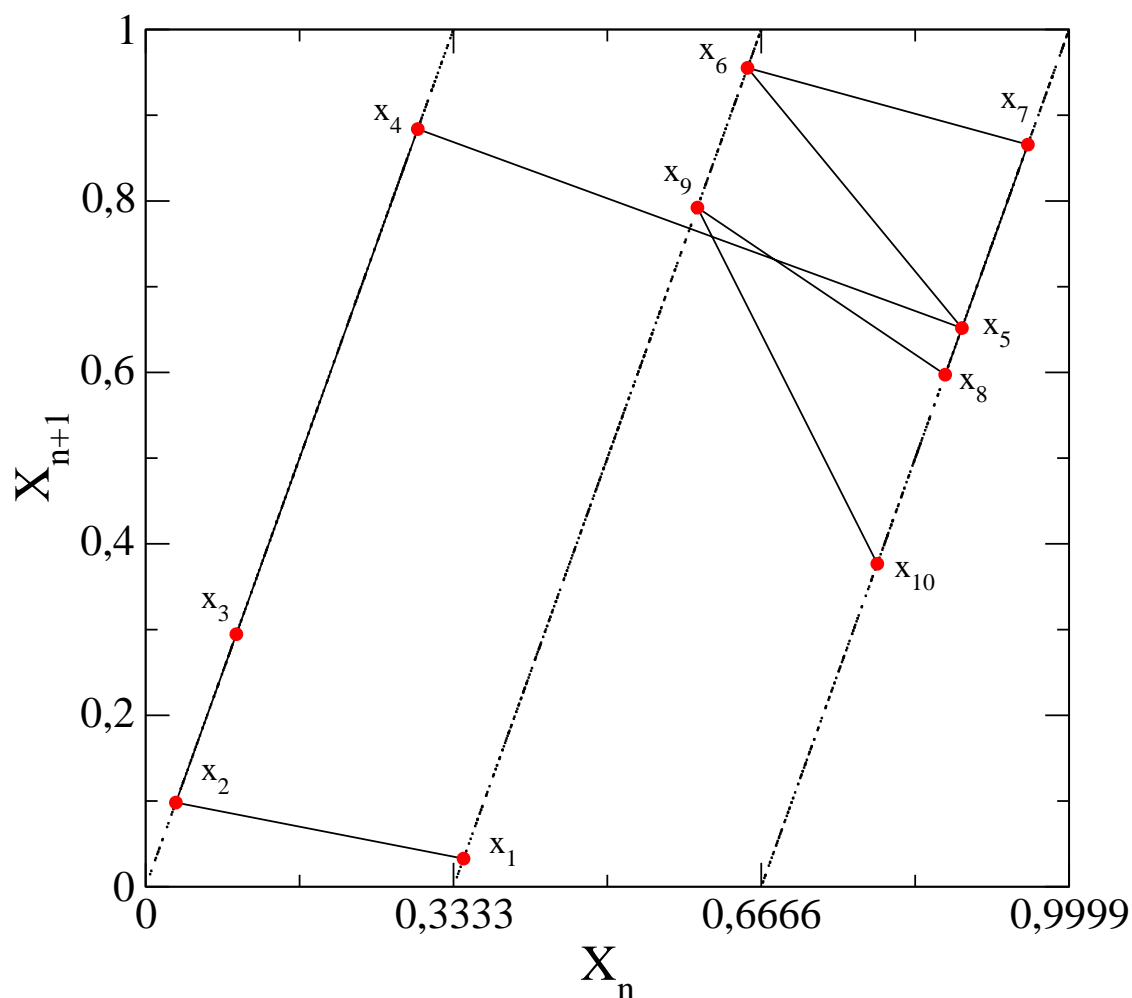


Figura 3.5: Ação do mapa de Bernoulli, com $\beta = 3$, para mil tempos de iteração. Enfatizamos os dez primeiros tempos de iteração do mapa apenas para frisar que a escolha dos intervalos é feita de maneira totalmente aleatória.

Como no caso do mapa logístico, aplicaremos as medidas de quantificação de recorrência (vide figura 3.6) para obtermos algumas informações relevantes sobre a dinâmica desse sistema, utilizando o mesmo procedimento usado no mapa logístico (vide figura 3.3).

Com base na figura 3.6, duas informações tornam-se mais relevantes. A primeira se relaciona à divergência das órbitas recorrentes e a segunda com o “peso” que o parâmetro

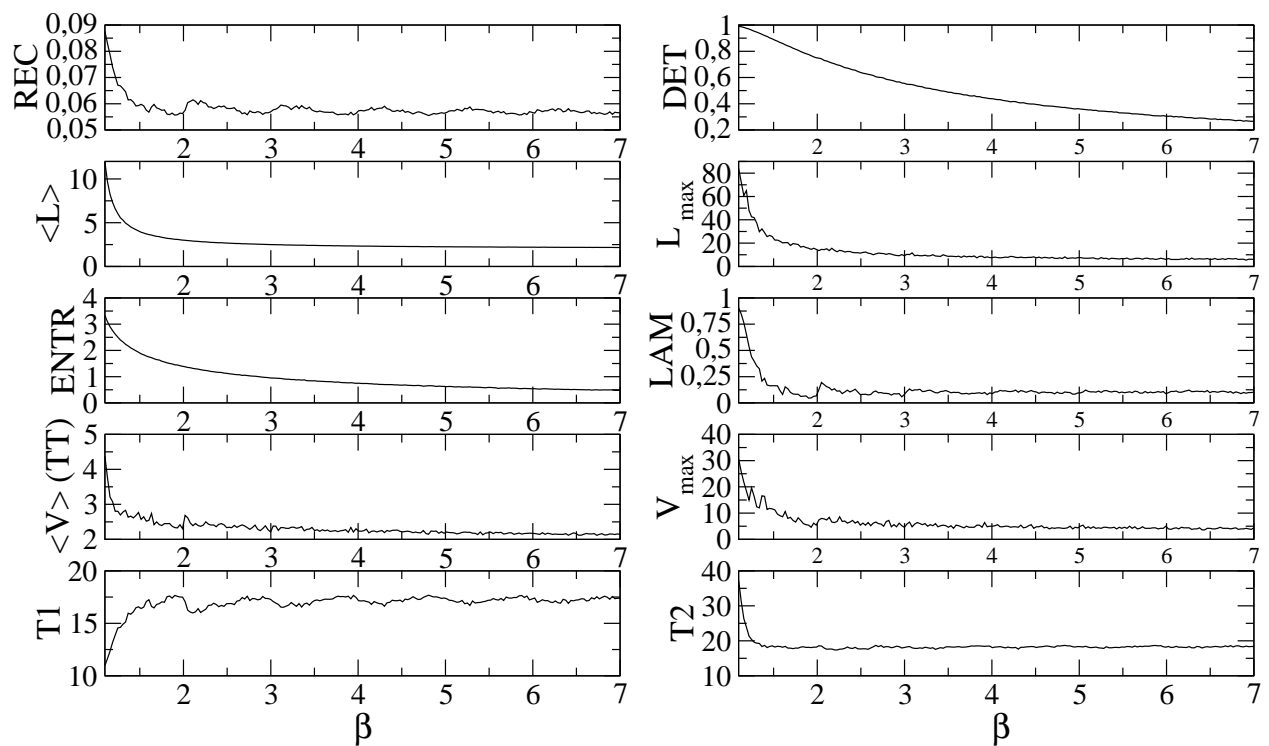


Figura 3.6: Medidas de quantificação de recorrência para diferentes tipos de β s.

β fornece a cada variável x_n . Visualmente verificamos que as dez medidas de quantificação apresentam uma “tendência” de decaimento muito parecidas, com exceção da medida T1. Com base nisso, faremos uso apenas de uma das nove medidas similares (excluindo T1) para tentarmos explicar o comportamento do sistema. Sabendo de antemão que o *expoente de Lyapunov*, discutido na sessão 2.1.12, também pode ser utilizado como quantificador da divergência local entre dois pontos de uma trajetória, tentaremos definir uma relação direta entre o Determinismo e os expoentes de Lyapunov do nosso sistema para séries temporais com diferentes valores de β 's¹.

Nosso procedimento agora será levemente diferente, contudo, poderá ser visualizado na figura 3.7. Geraremos 200 séries temporais (cada série para um valor de β distinto) com

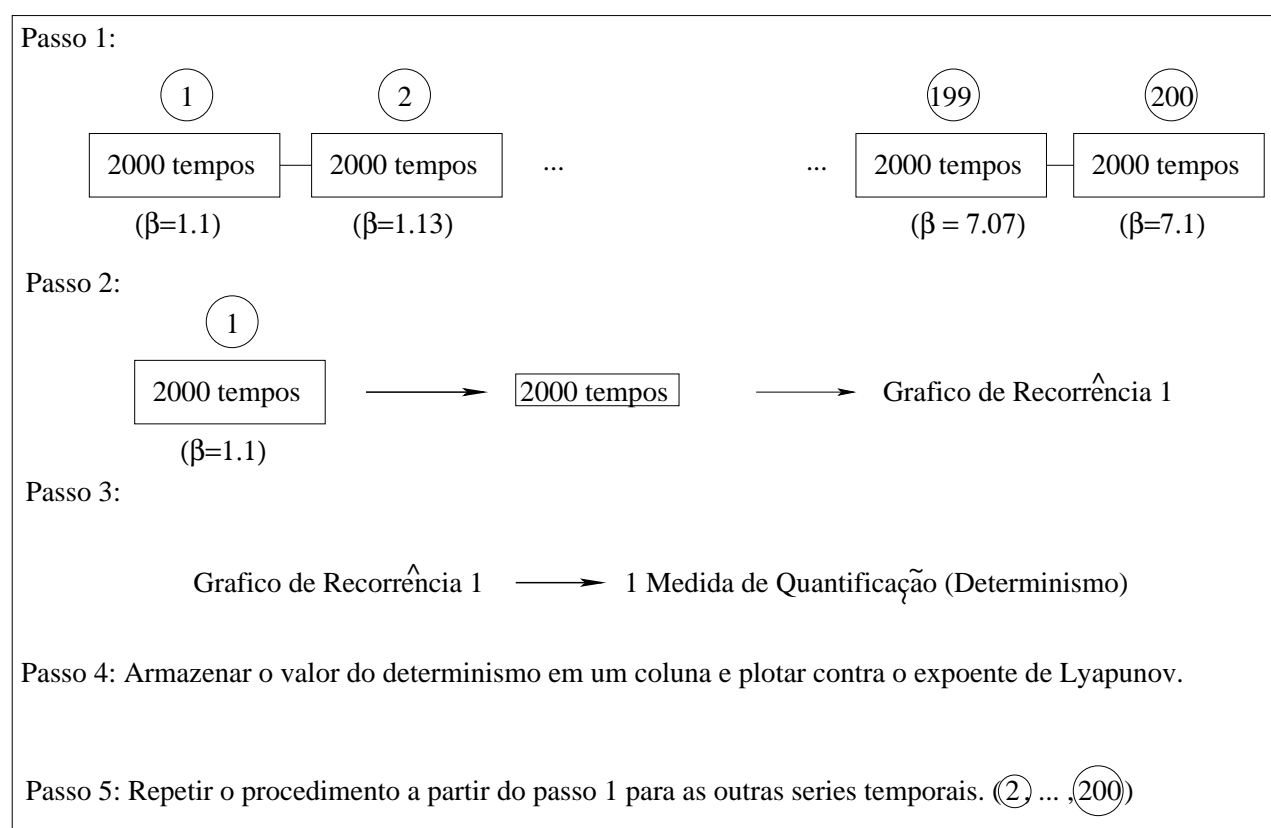


Figura 3.7: Medidas de Quantificação de Recorrência para diferentes tipos de β 's.

2000 tempos de iteração para cada uma dessas séries. O passo seguinte é calcular o gráfico de recorrência para cada uma dessas séries e, com base nesse gráfico, extrair o valor do determinismo para cada uma delas, totalizando 200 valores. Agora só nos resta conectar

¹O cálculo do expoente de Lyapunov para o mapa de Bernoulli, definido pela equação 3.5, pode ser calculado analiticamente, e resulta simplesmente da derivada da equação 3.5, ou seja, $\ln \beta$. Isso significa que o expoente de Lyapunov é constante para todos os tempos de iteração do mapa, só mudando quando alteramos o valor da constante β .

esses resultados com os respectivos valores do expoente de Lyapunov para cada uma das séries temporais, que é calculado através da derivada da equação 3.5. O resultado dessa “união” pode ser visualizado na figura 3.8.

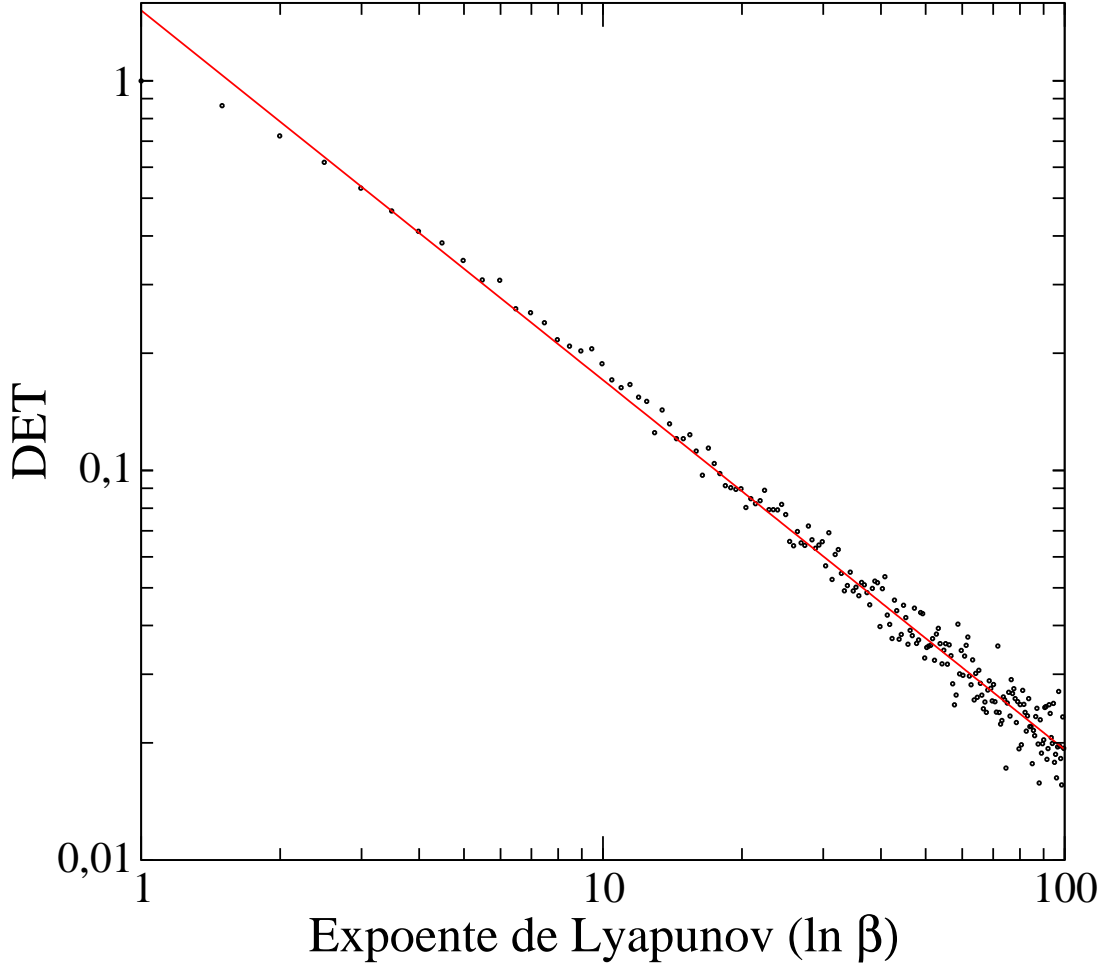


Figura 3.8: Expoentes de Lyapunov X Determinismo em escala log x log. Parâmetros de Imersão utilizados: Dimensão de Imersão ($m = 1$), tempo de retardo ($\tau = 1$) e raio da vizinhança ($\epsilon = 0.01$). A escolha de ϵ torna-se muito importante nessa caso, pois falsos vizinhos proporcionam uma relação diferente entre as duas grandezas.

O que podemos concluir imediatamente é a existência de uma relação direta linear e inversamente proporcional entre o determinismo das órbitas recorrentes e o expoente de Lyapunov. No entanto, em vista de alguns testes efetuados com o mapa logístico, os quais ainda não foram totalmente concluídos (e por isso não colocados nesse trabalho), parece sugestivo que a validade dessa relação só é garantida se o sistema possui expoentes de Lyapunov constantes durante o tempo de iteração (como já mencionamos, nesse caso, o expoente de Lyapunov é sempre $\ln \beta$).

A segunda observação, com respeito ao peso de diferentes β sobre a variável x_n , pode ser visualizada mais facilmente através de *REC* e corroborada com um histograma das séries temporais para alguns desses valores de β . Na figura 3.9, fizemos um comparativo dessas duas ferramentas.

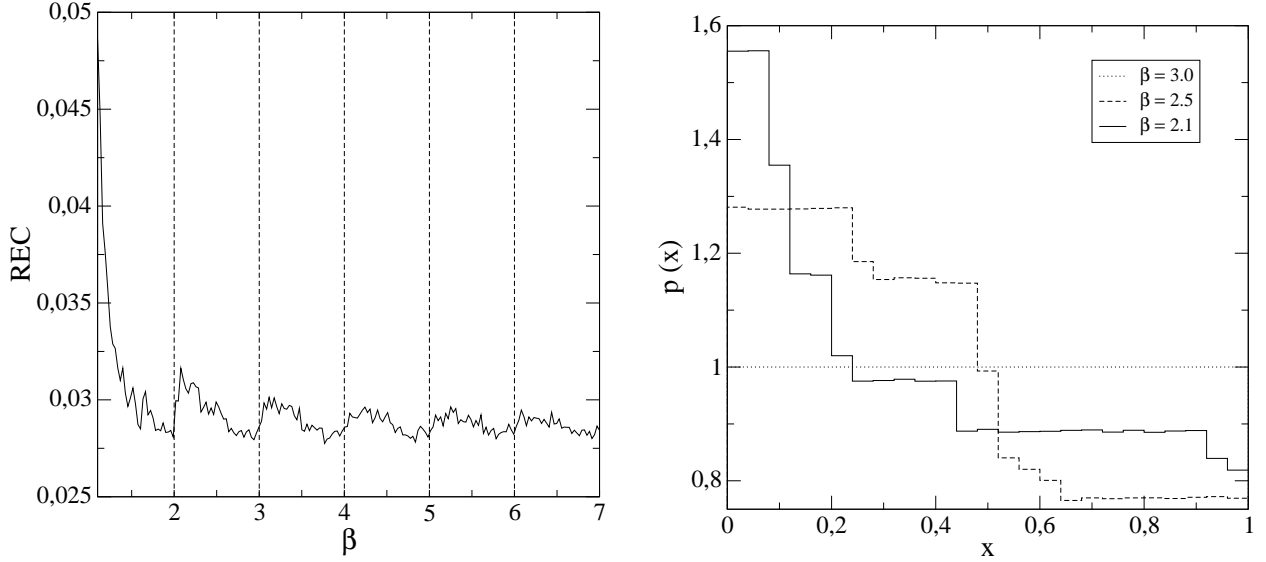


Figura 3.9: À esquerda, taxa de Recorrência (REC) para séries temporais com diferentes valores de β s. À direita, histograma de séries temporais com três valores de β s distintos. Note que na figura da esquerda, REC apresenta valores próximos de mínimos, para valores de β inteiros.

Visualizando a figura 3.9, podemos concluir que para valores de β inteiros, a distribuição se comporta de forma uniforme e com uma densidade de probabilidade constante. Entretanto, se tivermos valores de β fracionários (racionais positivos), a distribuição de probabilidade mostra que o sistema priorizará determinados valores e por isso a taxa de recorrência (REC) terá valores relativamente mais altos se comparado com séries temporais geradas por β 's inteiros. Se voltarmos novamente a analogia dos jogos de azar, podemos associar séries temporais com β s inteiros a dados honestos (um caso ideal) e β 's fracionários a dados desonestos (com probabilidades distintas para alguns dos lados).

3.2 Aplicações para mapas acoplados multidimensionais

Nessa seção faremos a análise de redes de mapas acoplados. Diferente dos mapas unidimensionais, quando variávamos os parâmetros de não linearidade, r e β , escolheremos outro

parâmetro para análise, o chamado parâmetro de acoplamento ϵ , e manteremos r e β sempre fixos em um valor que mantenha a dinâmica do sistema (inicialmente) sempre caótica .

3.2.1 Rede de mapas de Bernoulli acoplados e a transição: Hipercaos \rightarrow Caos \rightarrow Hipercaos

As redes de mapas acoplados (RMA) vem sendo intensamente utilizadas, desde meados dos anos 80, como modelos prototípicos para auxiliar na compreensão de fenômenos espaço-temporais [44]. Geralmente, os modelos mais usuais são cadeias periódicas com N mapas unidimensionais idênticos. Como já havíamos comentado anteriormente, na seção 2.13.1, para nossas análises em RMA escolheremos redes acopladas de forma global e linear, como a expressão matemática:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N (f(x_n^{(j)})), \quad (3.9)$$

onde $x_n^{(i)}$ representa a variável de estado para cada sitio i da rede, $f(x)$ é uma função linear ou não-linear, nesse caso o mapa de Bernoulli com $\beta = 3.0$, ϵ é a constante de acoplamento e N define o número de mapas da rede, o qual deve ser sempre um número ímpar. Acoplamentos globais são do tipo “campo médio”, ou seja, a dinâmica de cada sitio i da rede (cada mapa de Bernoulli) é determinada, não somente pela evolução individual desse sítio, mas também, pela média da evolução temporal de todos os outros sítios da rede. O “quanto” essa média sobre os outros sítios influencia sobre o sitio i é controlado justamente pelo parâmetro de acoplamento ϵ . A figura 3.11 mostra, de forma esquemática, um exemplo de uma rede de mapas de Bernoulli com cinco sítios. Em cada sítio, numerados de 1 à 5, é colocada uma condição inicial aleatória x_0 distinta a partir da qual, é feita a evolução da rede.

Para que fique claro a compreensão da nossa RMA, vamos discutir um pouco à respeito do parâmetro ϵ . Analisemos um caso limite, quando $\epsilon = 0.0$ (rede desacoplada). Nesse caso, cada sítio da rede representa um sistema independente e a equação 3.11 fica simplesmente:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}), \quad (3.10)$$

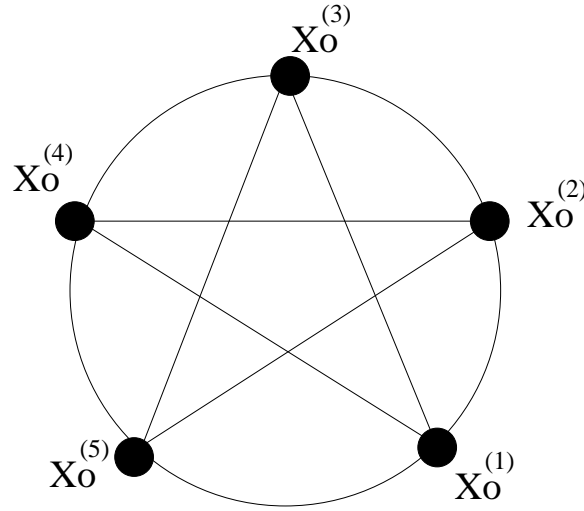


Figura 3.10: Rede com 5 mapas de Bernoulli acoplados de forma global (5 sítios). Para cada sítio i da rede utilizamos condições iniciais x_0 distintas. Vejam que todos os sítios da rede interagem entre si.

se quisermos uma rede com cinco sítios teremos:

$$x_{n+1}^{(1)} = f(x_n^{(1)}), \quad (3.11)$$

$$x_{n+1}^{(2)} = f(x_n^{(2)}), \quad (3.12)$$

$$x_{n+1}^{(3)} = f(x_n^{(3)}), \quad (3.13)$$

$$x_{n+1}^{(4)} = f(x_n^{(4)}), \quad (3.14)$$

$$x_{n+1}^{(5)} = f(x_n^{(5)}). \quad (3.15)$$

ou seja, quando o sistema está desacoplado, cada sítio i da rede representa um mapa de Bernoulli independente. A evolução temporal de cada sítio (através da iteração de cada mapa de Bernoulli) da rede fornecerá a série temporal do respectivo sítio. A partir do momento que $\epsilon \neq 0$, o sistema se acopla e por isso a série temporal de cada sítio, de agora em diante, será influenciada por todos os outros sítios da rede.

O passo seguinte é utilizar apenas “uma” dessas séries temporais e então, aplicar as medidas de quantificação de recorrência (MQR). Entendemos que, se a dinâmica de uma única série temporal possui influência de todo o conjunto da rede, podemos com ela obter diagnósticos gerais sobre essa rede. O processo de criação dessas séries é o mesmo utilizado no mapa logístico unidimensional (a figura 3.3 pode dar-lhe um “refresco” à memória) entretanto, com uma sutil diferença, variamos o parâmetro de acoplamento ϵ e fixamos o parâmetro β para um valor caótico. Então, se aplicarmos as MQR a essa série temporal,

obtemos a figura (figura 3.11).

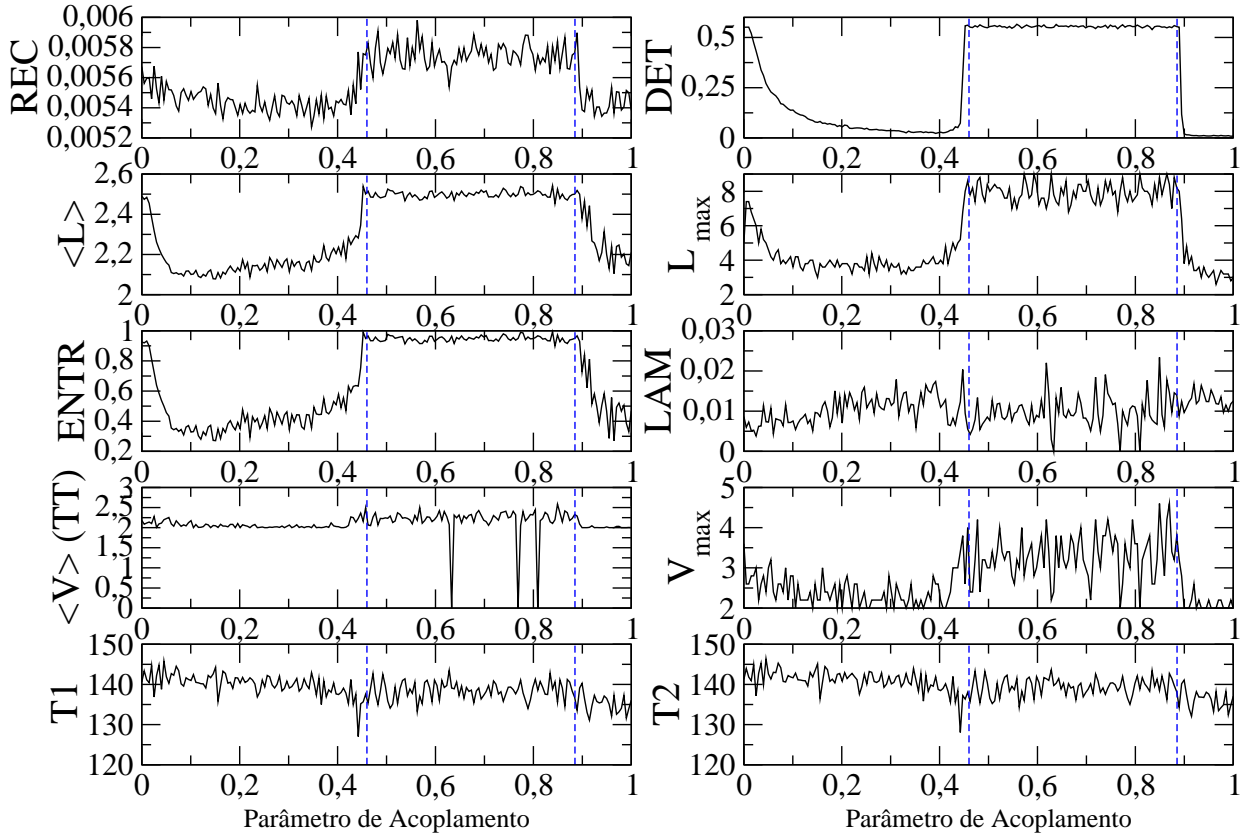


Figura 3.11: MQR para uma rede com 3 mapas de Bernoulli acoplados. Para a construção da figura alguns parâmetros foram utilizados: 50.000 pontos removidos de transiente com 5000 tempos de iteração do mapa para cada valor de ϵ . Os parâmetros de imersão: dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\rho_0 = 0.01$.

Analisando os resultados obtidos (figura 3.11) podemos notar que os diagnósticos possuem algumas características “fortes” e outras mais sutis. A característica denominada por nós como “forte”, está envolvida entre duas linhas pontilhadas, começando em $\epsilon \simeq 0.44$ e terminando em $\epsilon \simeq 0.88$. Se olharmos cuidadosamente nos dez diagnósticos, vemos que todos eles apresentam alguma alteração em sua dinâmica nessa região, seja por linhas diagonais ou verticais. Outra característica interessante, é que o valor em que ocorre essa mudança, olhando no eixo cartesiano das ordenadas, é aproximadamente o mesmo valor que a rede possui quando está desacoplada ($\epsilon = 0.0$).

Para entendermos um pouco do potencial das MQR, recorreremos a algumas ferramentas de estatística e faremos algumas observações a respeito da série temporal. Note que a menos de uma pequena mudança na amplitude dessas séries temporais (vide a figura 3.12) tanto (a) quanto (b) e (c), não diferem muito em seus comportamentos. Ou seja, apenas com

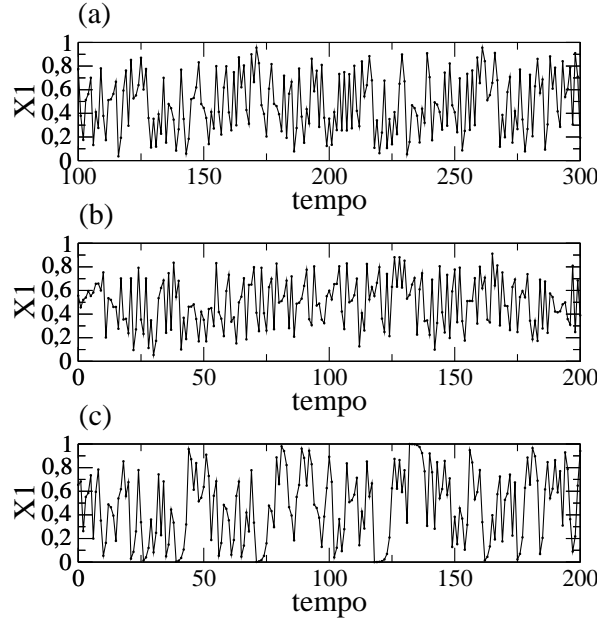


Figura 3.12: Série temporal gerada por 1 dos 3 mapas de Bernoulli acoplados. Por simplicidade, fragmentamos a série temporal em três partes. Em (a) geramos a série com o parâmetro de acoplamento fixo em $\epsilon = 0.20$. Em (b) com $\epsilon = 0.70$ e em (c) com $\epsilon = 0.85$.

uma análise visual das séries temporais não conseguimos obter informação alguma sobre a rede. Nossa expectativa agora deposita-se em torno da estatística. Apelamos aos momentos estatísticos (média, variância, desvio padrão, curtose e assimetria) começando, pela variância espacial da rede (variância entre os sítios) definida através da expressão matemática (3.16):

$$Var(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2. \quad (3.16)$$

onde \bar{x} é a média espacial entre os sítios da rede e N o número de termos dessa rede. Agora vamos plotar a variância espacial entre os sítios da rede em função do parâmetro de acoplamento ϵ para ver como ela se comporta. O resultado pode ser conferido na figura 3.13.

Como podemos ver, justamente para os valores $\epsilon \simeq 0.444$ e $\epsilon \simeq 0.888$, a variância do sistema cai à zero e em seguida difere de zero, respectivamente. Em termos de sincronização, quando a variância de uma rede é igual à zero, significa que a rede está sincronizada e no caso contrário, dessincronizada. Já sabemos então, que as MQR detectam o estado sincronizado e dessincronizado de um rede.

Constatado que as MQR detectam o estado sincronizado de um sistema dinâmico, voltemos à figura 3.11 para discutir o comportamento dessas medidas e suas tendências frente aos três mapas de Bernoulli acoplados. Vemos que em todos os diagnósticos o valor das MQR do estado sincronizado ($\epsilon \simeq 0.44$) é exatamente igual ao do estado desacoplado,

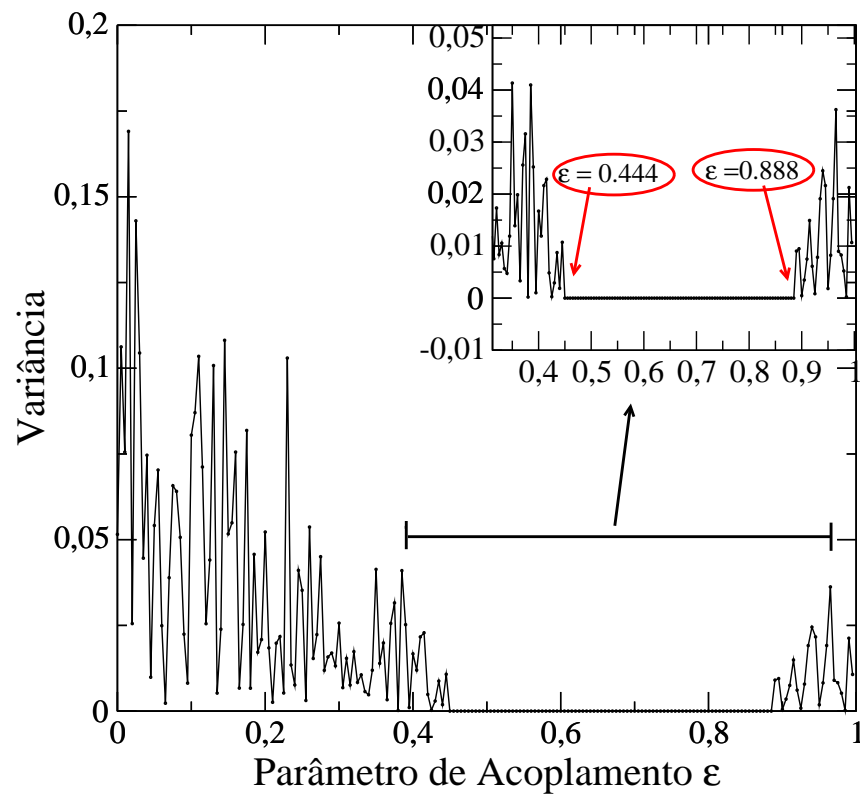


Figura 3.13: Rede com 3 mapas de Bernoulli acoplados (3 sítios). A variância da rede nos fornecerá a distância com que cada sítio ao longo do tempo se afastará da média do sistema. O termo quadrático apenas implicará em uma normalização desses valores que, pelo fato de não existir valores negativos, torna-se estritamente desnecessário.

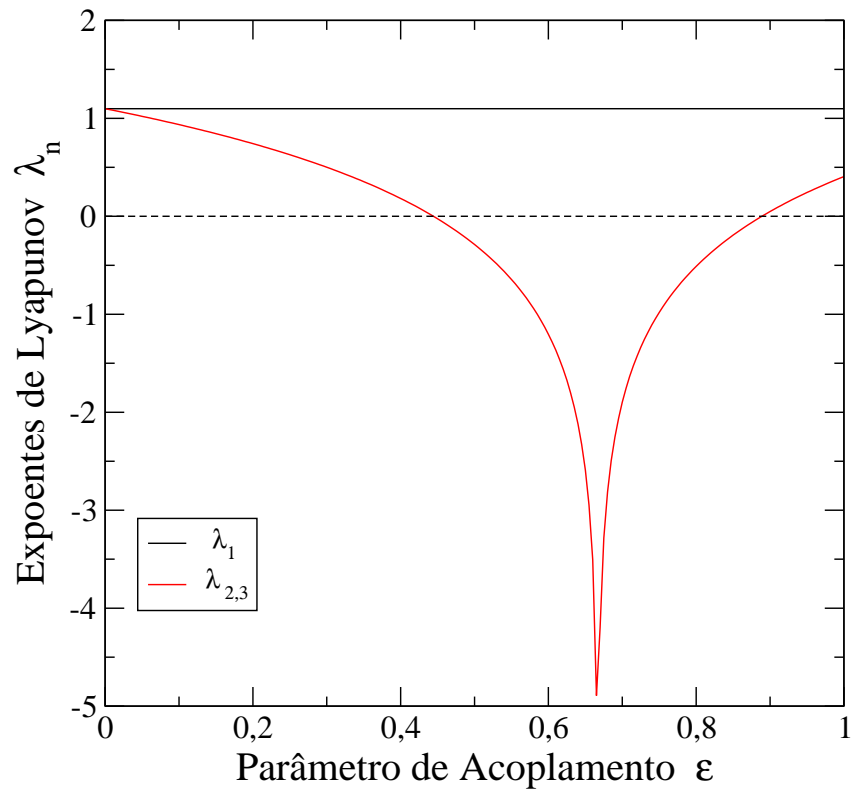


Figura 3.14: Lyapunov para 3 mapas de Bernoulli acoplados (3 sítios). Para cada sítio i da rede utilizamos condições iniciais x_0 distintas. Foram retiradas 30.000 tempos de iteração como transientes e computado a média para 20.000 iterações seguintes para 200 valores de ϵ distintos.

quando $\epsilon = 0$. Isso é esperado e pode ser justificado pelo seguinte raciocínio: Quando o sistema está desacoplado temos três mapas de Bernoulli independentes, B_1 , B_2 e B_3 , e cada um desses mapas, apresenta um valor característico para cada uma das 10 MQR, como podemos ver na figura 3.11, que representa as MQR da série temporal de apenas um desses mapas, digamos, B_1 . A partir do momento que o sistema se acopla, a dinâmica de B_1 vai sendo influenciada por B_2 e B_3 e todos os diagnósticos que representam estruturas diagonais como: DET , REC , $< L >$, L_{max} e $ENTR$ apresentam uma tendência de queda, que pode ser justificada pela diminuição do domínio da variável x_n , como podemos observar no diagrama da figura 3.15, e que fica mais evidente ainda no diagnóstico de determinismo (DET). Quando o sistema se aproxima da sincronização, as MQR voltam a apresentar tendências de subida, porque toda a dinâmica, que antes era regida por um sistema com três graus de liberdade, relativos à B_1 , B_2 e B_3 , fica restrita à dinâmica de um único mapa, como no caso desacoplado, permanecendo assim até o sistema dessincronizar ($\epsilon \simeq 0.88$), quando o sistema volta, novamente, a ter três graus de liberdade. Por esse motivo, o valor das MQR do caso desacoplado deve ser idêntico ao caso sincronizado.

Vamos ver agora como o parâmetro de acoplamento dessa rede se comporta frente aos expoentes de Lyapunov (figura 3.14). Cada curva ($\lambda_{1,2}$ e λ_3) representa o comportamento da evolução de cada sítio da rede. Dentro das condições de estabilidade, que definimos na seção 2.11 e 2.12, a nossa rede começa sua evolução em um estado hipercaótico, com $\lambda_{1,2} \text{ e } \lambda_3 > 0$. A partir daí, o sistema vai perdendo a instabilidade transversal, devido a queda nos valores dos de λ_2 e λ_3 , até atingir o valor $\epsilon \simeq 0.444$, quando a rede sincroniza. A partir desse valor o sistema torna-se caótico, pois $\lambda_1 > 0.0$ e λ_2 e $\lambda_3 = 0.0$. Então na interface de $\epsilon \simeq 0.444$ podemos garantir que sistema sofre uma transição do tipo *hipercaos* \rightarrow *caos* garantida pela nossa variedade invariante de sincronização e da mesma forma uma transição *caos* \rightarrow *hipercaos* quando $\epsilon \simeq 0.888$.

Todos os expoentes de Lyapunov foram calculados de forma numérica, como mostra a figura 3.14, utilizando o algoritmo de Wolf et. al. [42]. Contudo, existe uma relação analítica proposta por Batista et al. [46], tanto para acoplamentos globais como locais. Em nosso caso particular, o acoplamento global linear, essa relação torna-se:

$$\lambda_1(\beta) = \ln \beta, \quad (3.17)$$

$$\lambda_j(\beta, \epsilon) = \ln \left| \beta \left[1 - \epsilon \left(1 + \frac{1}{N-1} \right) \right] \right| \quad \text{onde } (j = 2, 3, \dots, N). \quad (3.18)$$

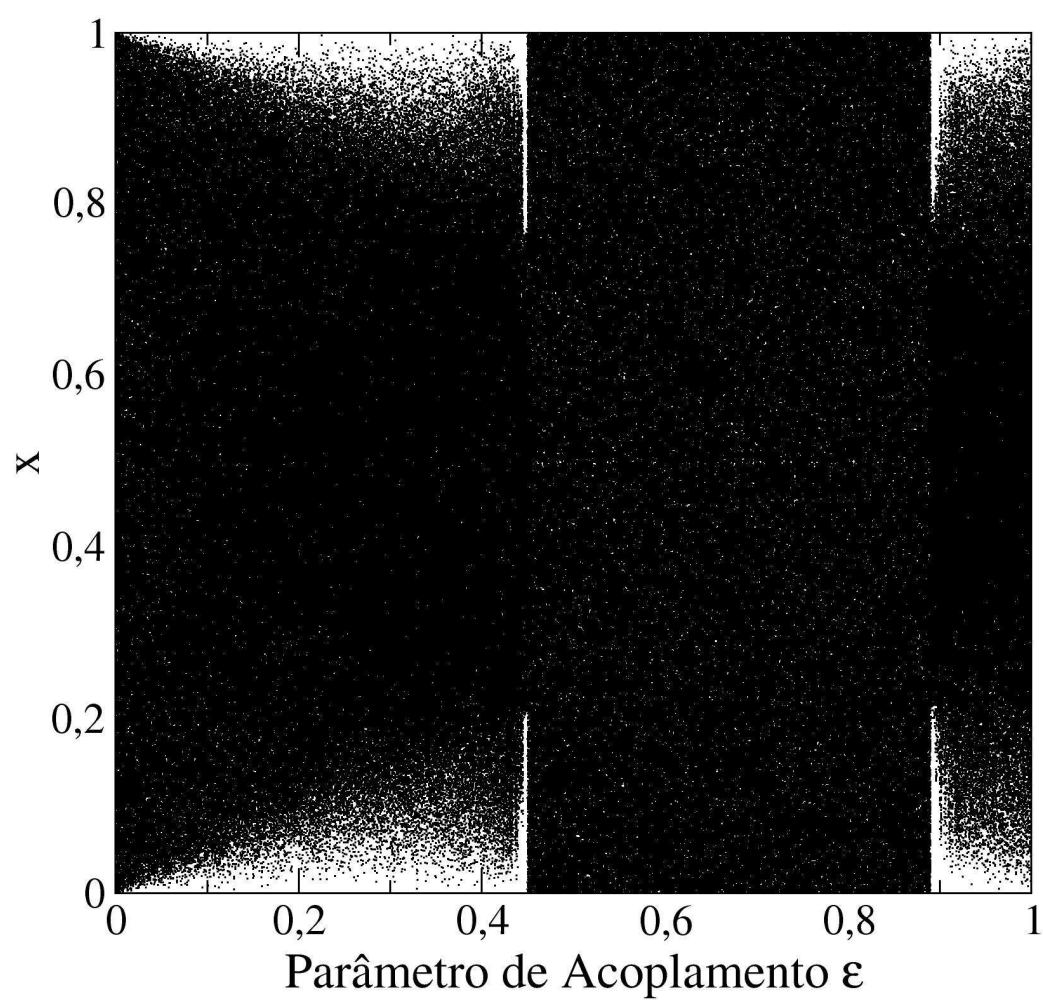


Figura 3.15: Diagrama $(\epsilon \times x)$ para 3 mapas de Bernoulli acoplados (3 sítios)

3.2.2 Intermitência

Outro fenômeno muito comum em dinâmica não-linear é a chamada intermitência [1], [2], [3]. Podemos resumi-la, de uma forma geral, como uma alternância entre movimentos aparentemente periódicos e caóticos. Isso ocorre normalmente devido a uma perda de estabilidade no sistema (o sistema aqui pode ser perfeitamente uma rede de mapas acoplados) conseqüente de mudanças no parâmetro de controle [11]. Se examinarmos inicialmente nossas MQR, na figura 3.11, não conseguimos perceber nenhum tipo de comportamento anormal ², por isso, resolvemos testar as MQR para redes com uma maior quantidade de mapas acoplados (19 e 57 mapas) e ver como as medidas se comportam.

Se olharmos nas figuras 3.16, vemos que as MQR revelam mudanças na tendência do comportamento das redes pouco antes dos valores de sincronização, que são $\epsilon_{sincr} \simeq 0.633$ para a rede com 19 mapas e $\epsilon_{sincr} \simeq 0.6549$ para a rede com 57 mapas, ocasionando um “pico”, o qual foi indicado por uma seta tanto na figura 3.16 (a) quanto na figura 3.16 (b).

Uma característica interessante desses picos é que eles tornam-se mais intensos para as MQR baseadas em estruturas verticais a medida que aumentamos o tamanho da nossa rede, como podemos ver novamente na figura 3.16 (a) em comparação com a figura 3.16 (b). Isso sugere que para redes com um maior número de mapas, a incidência de estruturas laminares é maior.

Para tanto, resolvemos analisar o que acontece nas séries temporais para essas redes com 3, 15 e 57 sítios, conforme a figura 3.17, para os respectivos valores de ϵ_{sincr} , ou seja, para os mesmos valores onde ocorrem os picos nas MQR das figuras 3.16 (a) e 3.16 (b).

Se observarmos as séries temporais da figura 3.17, vemos que o tipo de intermitência apresentada por essas redes de mapas acoplados não é uma intermitência bem definida como: intermitências de Pommeau-Manneville ou intermitência *on-off*. O que lhe dá o caráter intermitente é a oscilação entre estouros (*bursts*) caóticos e regiões aparentemente regulares, além de ocasionar uma nova rota *hipercaos* \rightarrow *caos* para sistemas acoplados. Contudo, podemos verificar, como já havíamos notado nas MQR da figura 3.16, que as regiões laminares, dadas pelo comportamento aparentemente regular, são realmente mais acentuadas para as rede com um maior número de mapas, o que nos leva a crer, que outros tipos de intermitências, as quais apresentem regiões muito mais laminares como por exemplo, a intermitência *on-off*, fiquem bem mais evidentes do que a intermitência aqui discutida.

Na figura 3.18 maximizamos a taxa de recorrência (REC), que embora não seja baseada apenas em estruturas verticais, proporciona uma comparação visual mais direta entre as

²Mencionamos “anormal” no sentido de que o sistema sempre obedece uma certa tendência em suas curvas, sem mudanças abruptas.

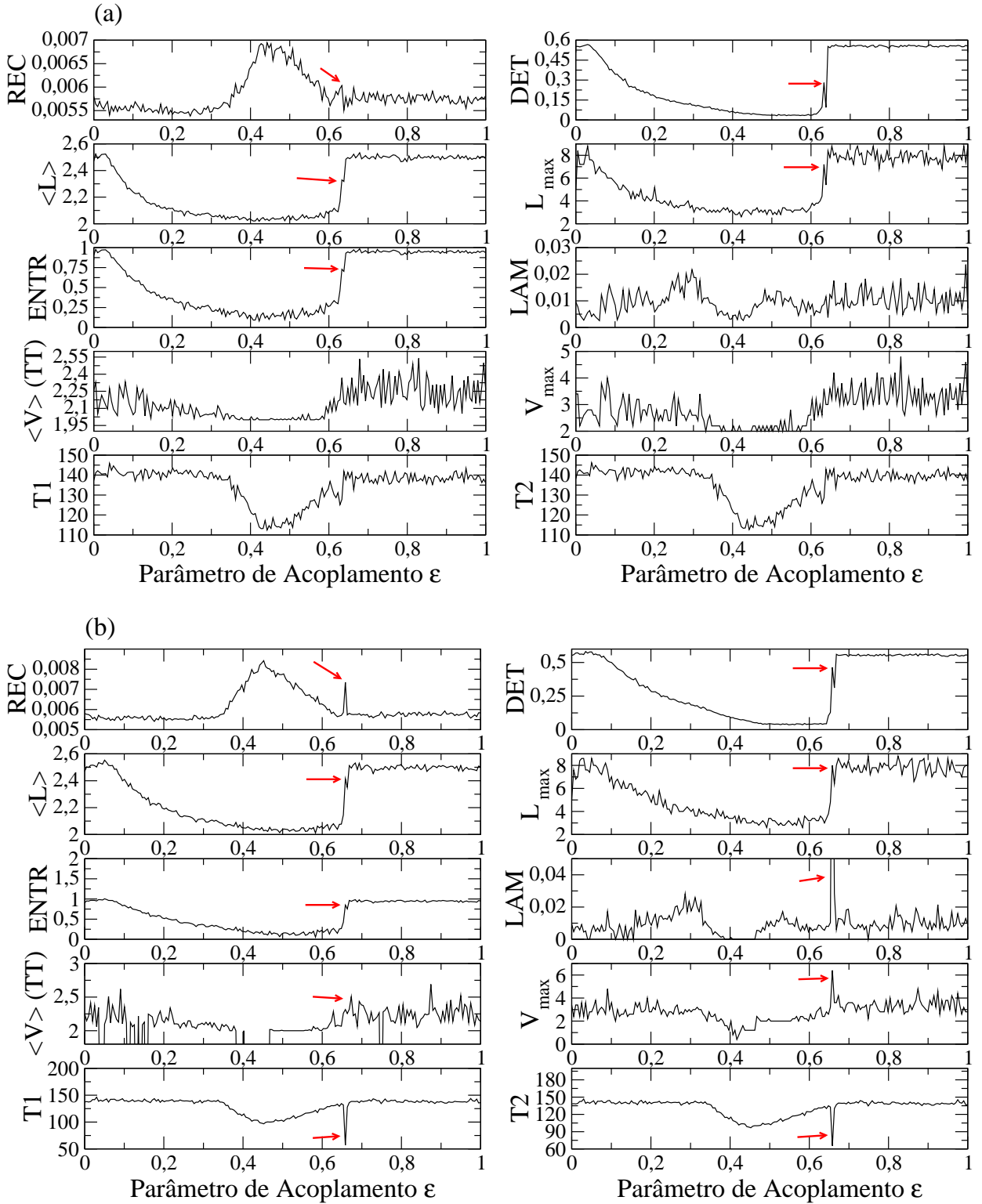


Figura 3.16: MQR para uma rede 19 (em (a)) e 57 (em (b)) mapas de Bernoulli acoplados. Parâmetros de imersão utilizados: dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\rho_0 = 0.01$.

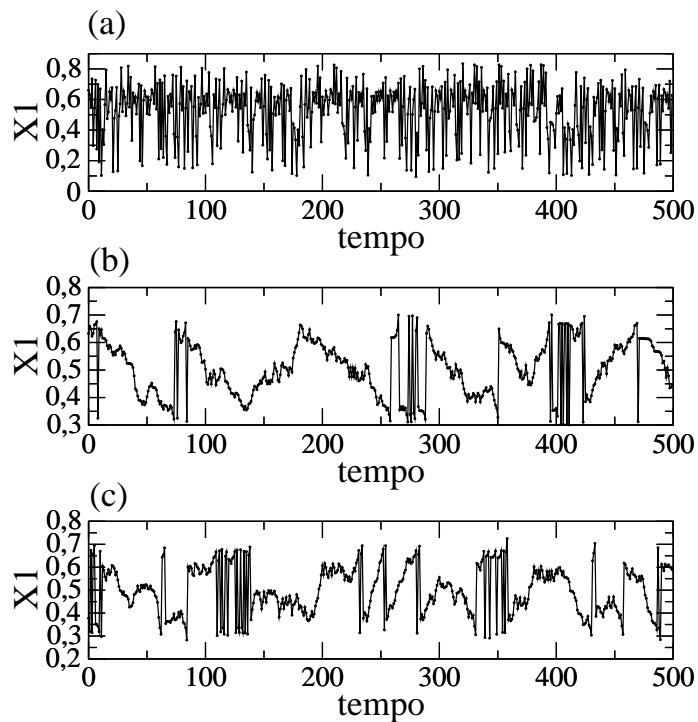


Figura 3.17: Intermitência para uma rede de mapas de Bernoulli acoplados. (a) Rede com três sítios; (b) com 15 sítios e (c) com 57 sítios.

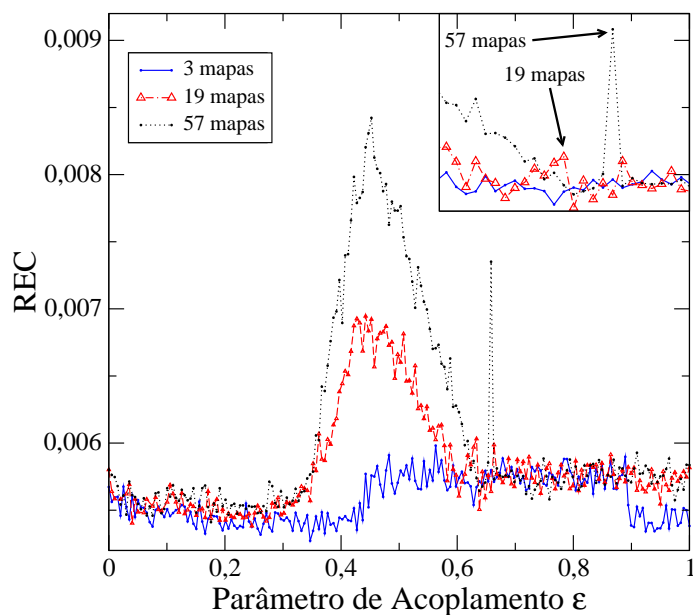


Figura 3.18: Comparação da taxa de recorrência (REC) para uma rede com 3, 19 e 57 sítios. No canto superior direito da figura mostramos uma ampliação da região onde ocorre os picos de intermitência. Parâmetros de imersão utilizados: dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\rho_0 = 0.01$.

redes com 3, 19 e 57 mapas acoplados. Dentre os possíveis questionamentos acerca da razão dessa intermitência, o fato de ela sempre ocorrer sempre na interface de transição *hipercaos* \rightarrow *caos*, nos leva a crer, que essa seja a principal responsável desse fenômeno.

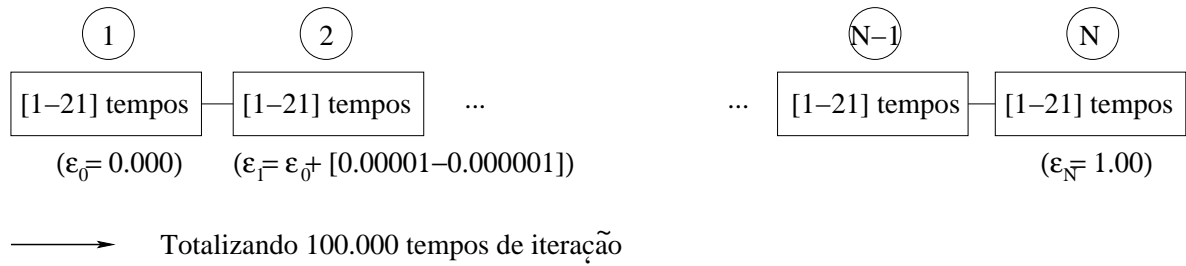
3.2.3 Testando estacionariedade

Testamos agora o vigor de nossos resultados frente a uma série não-estacionária (vide a explicação de série não-estacionária na seção 2.10). Até agora procedemos da seguinte maneira: manipulávamos 200 séries temporais, onde cada *uma* dessas 200 séries era resultado de 5000 iterações de um mapa, o qual utilizava nessas 5.000 iterações, um valor fixo de ϵ , contudo, diferente para cada uma dessas séries. Ou seja, nosso parâmetro de acoplamento ϵ variava de forma crescente e linear para cada série temporal. Contudo, para cada série individual, esse parâmetro era fixo. Exatamente como no esquema da figura 3.3 (apenas substituindo o parâmetro r por ϵ). Se para cada série os parâmetros são fixos, as distribuições de probabilidades não mudam com as 5000 iterações do mapa (ou seja, não mudam com o tempo). Sendo assim, todas as séries geradas até agora são *estacionárias*.

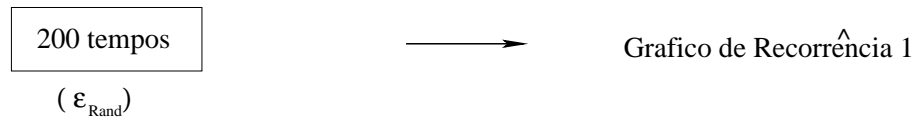
Para gerarmos séries não-estacionárias, precisamos variar um parâmetro para cada iteração do nosso mapa, sendo assim, adotamos um procedimento levemente diferente. Ao invés de fixarmos o número de iterações do mapa em 5.000 e a cada nova série criada incrementarmos o parâmetro ϵ de forma constante como fazíamos nos sistemas tratados anteriormente, iteraremos nosso mapa de forma aleatória dentro de um intervalo de 1 à 21 iterações (como podemos ver no passo 1 da figura 3.19) e depois, quando gerarmos novas séries (passo 1 aplicado à série 2), incrementaremos ϵ de forma aleatória, porém crescente, entre os valores 10^{-5} e 10^{-6} , ou seja $\epsilon_{serie_{n+1}} = \epsilon_{serie_n} + [10^{-5}, 10^{-6}]$. Isso fará com que o parâmetro de controle do nosso sistema varie de forma aleatória, com distribuições de probabilidades diferentes para cada série, chegando o mais próximo possível de uma série experimental, a qual, normalmente não sabemos como variam os seus parâmetros de controle, ou se sabemos, temos dificuldade de manipulá-lo. Sabido o processo de como gerar uma série não estacionária, apliquemos então, as MQR.

A figura 3.20 é o resultado das MQR para séries não-estacionárias e na figura 3.21 plotamos novamente a série estacionária para título de comparação. Um resultado muito interessante é que podemos observar que a transição *hipercaos* \rightarrow *caos* se mantém presente em nossos diagnósticos, independente se a série é estacionária ou não. Isso sugere que além das MQR serem bons quantificadores frente a séries teóricas, também são robustas quanto a aplicação em séries teórico experimentais ruidosas. Contudo, esse resultado possui uma restrição. Se observarmos a figura 3.20 vemos que a transição *hipercaos* \rightarrow *caos* aparece de forma acentuada, no entanto, a transição *caos* \rightarrow *hipercaos* não é vista. Isso decorre

Passo 1:



Passo 2:



Passo 3:



Passo 4: Plotar 1 ponto na figura das MQR e repetir o procedimento a partir do passo 1 para ②, ..., ②①①

Figura 3.19: Procedimento para gerar série não-estacionária.

do fato de que as condições iniciais, após o sistema entrar em um regime de sincronização, devem pertencer à variedade invariante de sincronização, ou seja, devem ser sincronizadas. Caso isso não ocorra, os diagnósticos não se comportam de forma satisfatória, apresentando muitas aberrações, inclusive, com comportamentos ainda não entendidos.

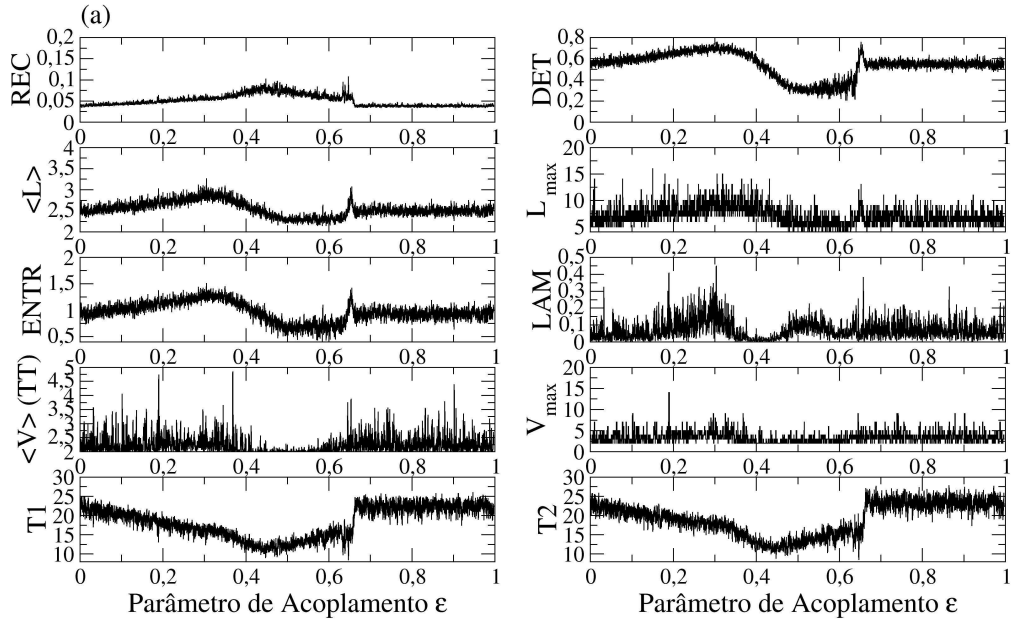


Figura 3.20: Rede com 57 mapas de Bernoulli acoplados (57 sítios) para série não estacionária. Parâmetros de imersão utilizados: Dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$, raio da vizinhança $\rho_0 = 0.01$, janela = 200, passo da janela $ws = 1$ e janela de Theiler $jt = 1$.

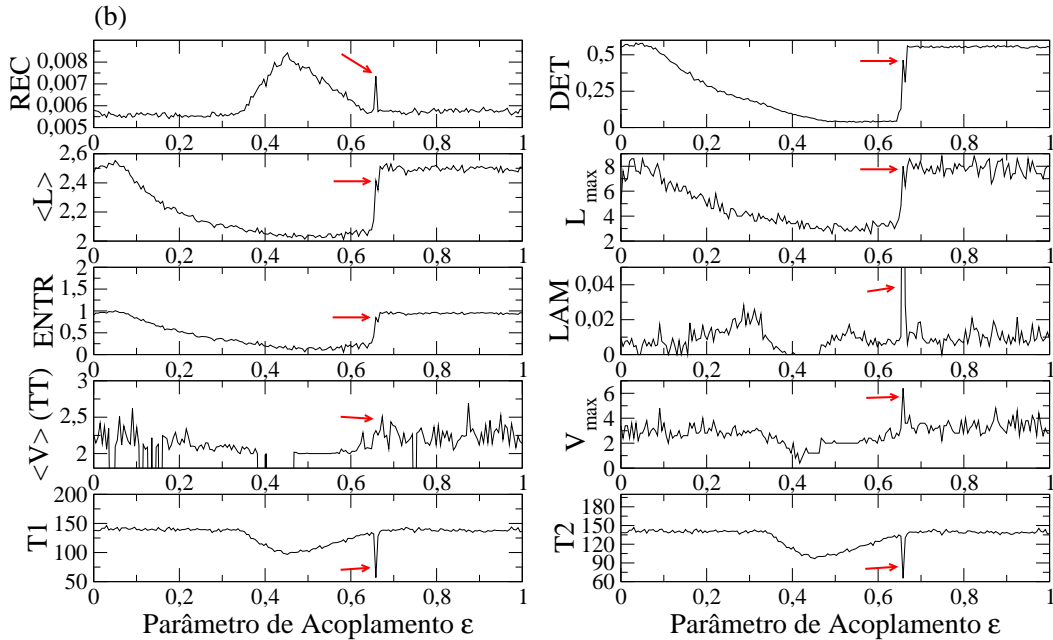


Figura 3.21: Rede com 57 mapas de Bernoulli acoplados (57 sítios) para série estacionária. Parâmetros de imersão utilizados: Dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\rho_0 = 0.01$.

Capítulo 4

Gráficos de recorrência para fluxos e seus Resultados

4.1 O circuito de Chua

O circuito de Chua é um circuito eletrônico bastante popular (figura 4.1 (a)), o qual popularizou-se na década de 80 pelos trabalhos realizados por Matsumoto e Chua [47], [48]. A partir daí, ganhou prestígio na comunidade científica devido ao seu fácil modelamento através de equações diferenciais, produzindo uma ponte entre fenômenos teóricos e experimentais. O circuito constitui-se de dois capacitores (C_1 e C_2), um indutor (L), um resistor linear (R_L) e um resistor não-linear (R_{NL}). Se aplicarmos as leis de Kirchhoff as três malhas do sistema obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{(V_{C_2} - V_{C_1})}{R} - g(V_{C_1}), \\C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{(V_{C_1} - V_{C_2})}{R} - i_L, \\L \frac{di_L}{dt} &= -V_{C_2},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde V_{C_1} e V_{C_2} são os potenciais nos capacitores C_1 e C_2 respectivamente; i_L é a corrente que atravessa o indutor L e R a resistência linear desse sistema. Para entendermos o significado de $g_{V_{C_1}}$, olhemos a figura 4.1. Nela vemos a curva característica de R_{NL} , a qual dará a não linearidade ao nosso conjunto de equações diferenciais, comparada a uma curva linear ($y = -x$). Os fatores m_1 e m_2 fornecem as respectivas inclinações da curva de R_{NL} em relação ao sistemas de coordenadas. Com base nessa curva característica escrevemos a equação de $g(V_{C_1})$:

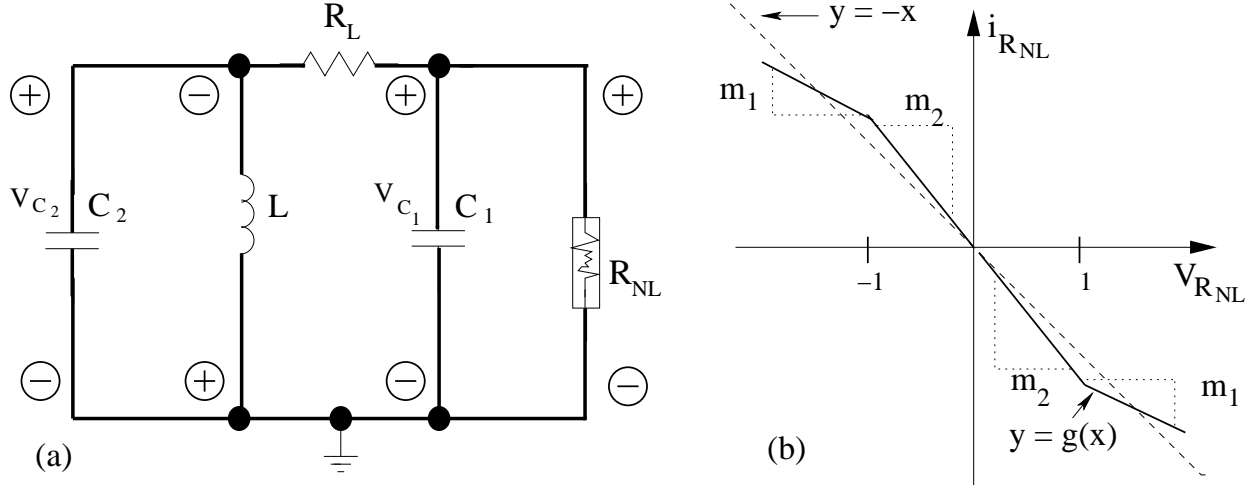


Figura 4.1: (a) Montagem esquemática do circuito de Chua composto de quatro elementos lineares (L , C_1 , C_2 e R_L) e um elemento não-linear (R_{NL}); (b) Curva característica do resistor não-linear (R_{NL}).

$$g(V_{C1}) = m_1 V_{C1} + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(|V_{C1} + 1| - |V_{C1} - 1|). \quad (4.2)$$

Em vista de uma simplificação matemática, o circuito de Chua pode ser reescrito de forma que suas equações se reduzam a poucos parâmetros, ou seja, se fizermos:

$$\begin{aligned} x &= V_{C1}, & y &= V_{C2}, & z &= \frac{i_L}{g}, \\ \tau &= \frac{tg}{C_2}, & a &= \frac{m_2}{g}, & b &= \frac{m_1}{g}, \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, & \beta &= \frac{C_2}{Lg^2}, & g &= \frac{1}{R}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

temos a seguinte forma *adimensional* para as equações (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y; \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde:

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & \text{se } x \geq 1 \\ ax, & \text{se } |x| \leq 1 \\ bx - a + b, & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

e α , β , a e b são reais, α e $\beta > 0$, a e $b < 0$. Para nossos cálculos das MQR, procederemos exatamente como foi feito para o mapa logístico (vide o procedimento na figura 3.3), inclusive com os mesmos parâmetros de imersão utilizados anteriormente, ou seja, $m = 1$, $\tau = 1$ e $\rho_0 = 0.1$ ¹, e com isso, mostraremos como a variação do parâmetro β interfere na dinâmica recorrente do circuito de Chua. Nesses cálculos, manteremos os seguintes parâmetros fixos: $\alpha = 15.6$, $a \simeq 1.14$ e $b \simeq 0.71$ com condições iniciais x_0 , y_0 e z_0 aleatórias. O resultado desse cálculo pode ser visto na figura 4.2. Nela, o que “salta ao olhos” é que algumas das MQR exibem um pico de máximo para o valor $\beta \simeq 31.15$. Em vista desse comportamento abrupto, projetamos o atrator de Chua em duas dimensões (xXy) para diferentes valores de β (figura 4.3) na tentativa de identificar alguma mudança no atrator. Para nossa surpresa, justamente para $\beta \simeq 31.15$ ocorre a “fusão” do atrator conhecido como rolo-duplo (do inglês *double-double-scroll*) com um atrator singular (do tipo Rössler). Isso prova que o gráfico de recorrência, além de ser ótimo para detecção de transições através de variedades de sincronização (transições hipercaos-caos, por exemplo), também serve como revelador de alguns tipos de crise, que nesse caso, ocasionam a junção desses atratores.

4.2 Aplicações para fluxos acoplados multidimensionais

Nessa seção, de forma análoga as redes de mapas acoplados, analisaremos o comportamento de uma rede composta por dois circuitos de Chua acoplados.

4.2.1 Circuito de Chua acoplado e a transição: Hipercaos \rightarrow Caos \rightarrow Hipercaos

Nossa rede de circuitos de Chua será acoplada de forma bi-direcional e apenas em uma variável dinâmica para cada sistema de equações diferenciais, da seguinte maneira:

¹Se aplicarmos a técnica de falsos vizinhos a nossa série temporal (vide capítulo 2, sessão 2.8.2), e utilizarmos a imersão sugerida por ela em nossas MQR, ou seja, $m = 5$, vemos que apenas a tendência dos nossos diagnósticos mudam (apresentam subidas e descidas diferentes de $m = 1$), no entanto, a transição que discutiremos a seguir permanece invariante à escolha dessa imersão.

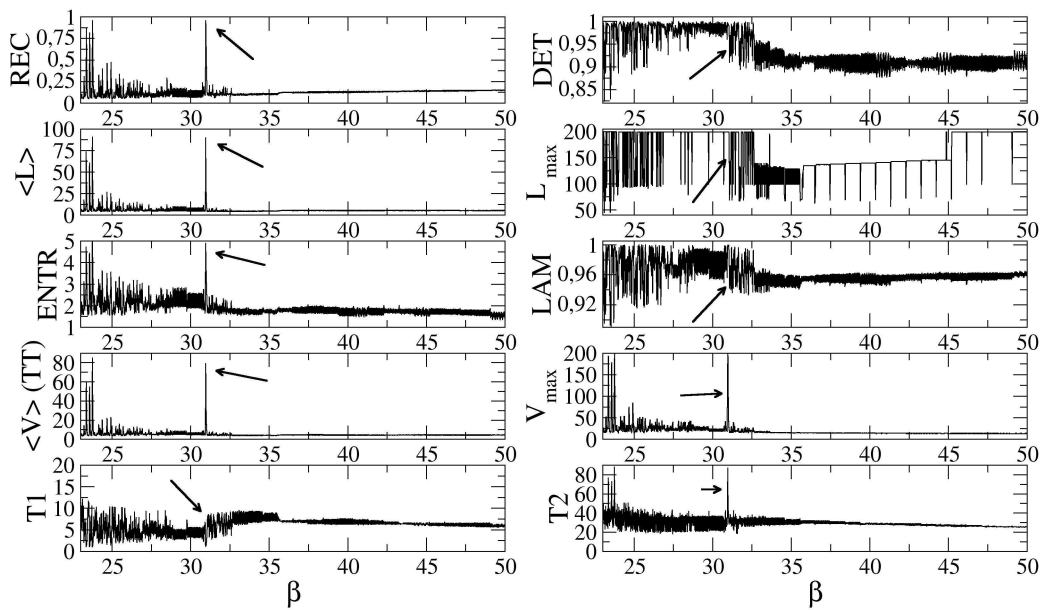


Figura 4.2: MQR do circuito de Chua. Parâmetros de imersão utilizados: dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\epsilon = 0.01$.

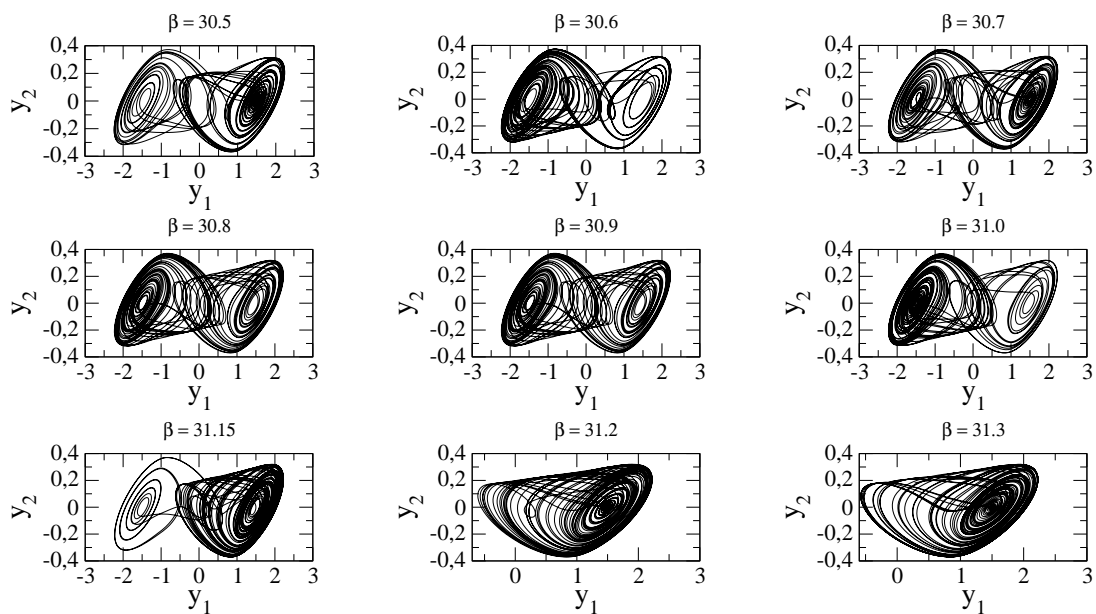


Figura 4.3: Projeções do atrator de chua (xXy) para diferentes valores de β .

Sistema 1:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - x_2 + x_3) + \epsilon(x_5 - x_2), \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Sistema 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 &= \alpha(x_5 - x_4 - f(x_4)), \\ \dot{x}_5 &= (x_4 - x_5 + x_6) + \epsilon(x_2 - x_5), \\ \dot{x}_6 &= -\beta x_5,\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde:

$$f(x_1) = \begin{cases} bx_1 + a - b, & \text{se } x_1 \geq 1 \\ ax_1, & \text{se } |x_1| \leq 1 \\ bx_1 - a + b, & \text{se } x_1 \leq -1 \end{cases}$$

e:

$$f(x_4) = \begin{cases} bx_4 + a - b, & \text{se } x_4 \geq 1 \\ ax_4, & \text{se } |x_4| \leq 1 \\ bx_4 - a + b, & \text{se } x_4 \leq -1 \end{cases}$$

Dessa vez, diferente do circuito de Chua desacoplado, os parâmetros fixos utilizados foram: $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$ e $b = -0.68$, com condições iniciais $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0.0$, $x_1 = 0.010$ e $x_4 = 0.011$. No sistema 2 escolhemos $\epsilon = 0.0$ e, sendo assim, um acoplamento do tipo uni-direcional. Todos esses dados foram escolhidos propositalmente de acordo com Anishchenko et. al. [49], na qual essa mesma configuração possibilitou a descoberta de uma transição caos-hipercaos nesse sistema (comprovada através do espectro de Lyapunov). Como parâmetro variável escolhemos ϵ no domínio entre $[0, 2]$.

Se integrarmos esse conjunto de equações diferenciais (equações 4.5 e 4.6) obteremos seis séries temporais. Como nos casos de outros sistemas já analisados nesse trabalho (mapa logístico, mapa de Bernoulli, etc), caso haja eventuais transições nessas séries temporais, essas tornam-se praticamente invisíveis a partir de uma simples análise visual (como já foi mostrados no caso de uma rede de mapas de Bernoulli acoplados), contudo se utilizarmos os gráficos de recorrência e suas medidas de quantificação isso torna-se viável.

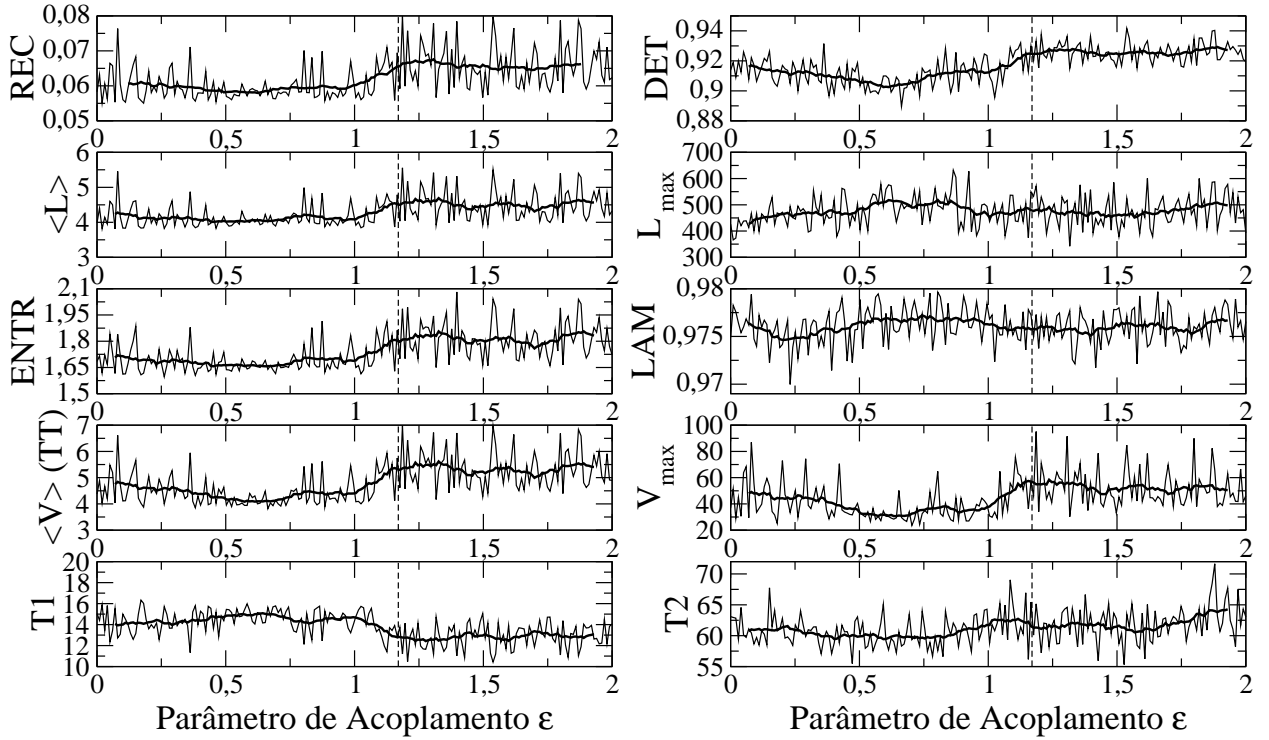


Figura 4.4: MQR do circuito de Chua acoplado. Em cada medida de quantificação, calculamos a média de cada diagnóstico (linha mais grossa). A linha pontilhada representa um valor crítico de ρ_0 , quando o sistema aparenta um possível mudança de comportamento. Parâmetros de imersão utilizados: dimensão de imersão $m = 1$, tempo de retardo $\tau = 1$ e raio da vizinhança $\epsilon = 0.01$.

Simplesmente por conveniência, escolhemos (x_2) para aplicarmos as MQR (figura 4.4), procedendo de forma idêntica, inclusive com os parâmetros de imersão, a rede de mapa de Bernoulli acoplados cujo procedimento encontra-se na seção 3.21 e na figura 3.3.

De acordo com a figura 4.4, notamos que as MQR exibem uma leve mudança, principalmente para os diagnósticos REC e ENTR, em um valor crítico de ϵ ($\epsilon \simeq 1.17$), quando o sistema revela um aumento (ou queda no caso de T_1) na média dos respectivos valores de cada diagnóstico. O fato de T_1 apresentar queda, diferente dos outros diagnósticos, é que ele representa o tempo de recorrência de cada órbita, logo, quanto maior o valor de REC, ou seja, quanto mais órbitas recorrentes o sistema possuir, menos tempo essas órbitas levarão para recorrer, logo, T_1 apresenta um tendência de queda quando REC tiver tendências de alta (e conseqüentemente essa tendência funciona para todas as outras MQR, já que todas elas são normalizadas por pontos, diagonais e verticais recorrentes).

Em vista desse comportamento e de um eventual suspeita sobre a transição hipercaos-chaos (baseada na rede de mapas de Bernoulli acoplados), calculamos o espectro de Lyapunov (figura 4.5) para vermos se esse comportamento possui alguma relação direta com a

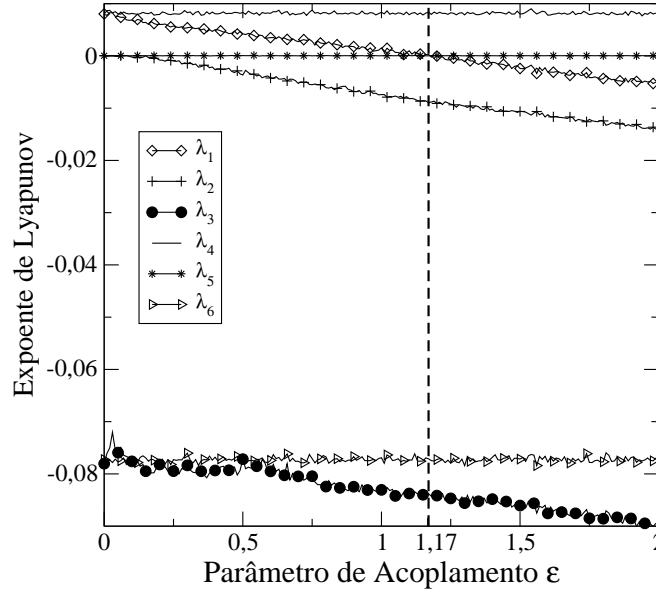


Figura 4.5: Exponente de Lyapunov para dois circuitos de Chua acoplados. Parâmetros utilizados: $\alpha = 10.0$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$ e $b = -0.68$, com condições iniciais $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0.0$, $x_1 = 0.010$, $x_4 = 0.011$ e com 10.000 tempos de integração computados.

divergência exponencial dessas trajetórias.

Observando a figura 4.5, vemos que o valor $\epsilon_{critico} \simeq 1.17$ caracteriza justamente a transição hipercaos - caos, como havíamos suspeitado. Revelando mais uma vez, que as MQR são úteis como diagnóstico de transição tanto em mapas quanto em fluxos. E em geral, sempre que tivermos uma variedade invariante de sincronização.

Capítulo 5

Conclusão

Nesse trabalho procuramos estudar, analisar e ver o alcance de uma das mais recentes ferramentas da dinâmica não-linear, o gráfico de recorrência e suas medidas de quantificação. Através do uso dessa ferramenta, analisamos vários sistemas físicos (mapa logístico, mapa de Bernoulli, rede de mapas de Bernoulli acoplados, circuito de Chua e circuito de Chua acoplado) e mais alguns outros sistemas (mapa da tenda, rotor-duplo e rede de mapas logísticos acoplados) que não foram incluídos nesse trabalho. O mapa logístico serviu como escola básica e revelou-nos o potencial dos gráficos de recorrência em detectar bifurcações, janelas periódicas, bem como o período dessas janelas.

Dando sequência a essas descobertas e auxiliados sempre pelos trabalhos de Marwan [17], analisamos o mapa de Bernoulli. Com ele fomos capazes de descobrir como o gráfico de recorrência pode ser útil se aplicado a uma série temporal de jogos de azar, revelando possíveis infrações no lançamento de um dado. Ainda com o mapa de Bernoulli unidimensional, fomos capazes de estabelecer uma relação direta entre o determinismo e o expoente de Lyapunov para essa classe de mapas.

Quando aplicado a uma rede de mapas ou fluxos acoplados, o gráfico de recorrência viabiliza a visualização de transições do tipo hiper-caos \rightarrow caos e vice-versa. Na literatura, principalmente nos trabalhos de Marwan citados anteriormente, constam apenas transições do tipo periódico \rightarrow caos (caos \rightarrow periódico), sendo a nossa, portanto, inédita. Além disso, na interface dessa transição, o gráfico de recorrência mostrou-se hábil na detecção de intermitências.

Embora todos os resultados obtidos até então tenham sido de caráter estacionário, ou seja, as distribuições de probabilidade não mudam com o tempo, os mesmos mostraram-se robustos também frente a séries não estacionárias (séries com distribuições de probabilidades que variam no tempo).

Quando aplicado a um fluxo (o circuito de Chua), o gráfico de recorrência possibilita a visualização de um novo tipo de transição, na qual pode-se observar a fusão de um atrator

conhecido como “rolo-duplo” em um outro atrator singular do tipo Rössler.

Contudo, uma série de trabalhos pendentes podem ser propostos. Um deles diz respeito à aplicação do gráfico de recorrência a séries experimentais reais como: bolsa de valores, séries de eletrocardiogramas, circuitos de Chua experimentais, etc. Isso geraria uma ponte teórico-experimental, proporcionando um maior refinamento à previsibilidade da ferramenta. Outra idéia seria analisar a transição hipercaos \rightarrow caos sem uma variedade invariante de sincronização, cruzando várias séries temporais e fazendo uso de uma ferramenta semelhante ao gráfico de recorrência, o gráfico de recorrência cruzado (*cross recurrence plot*).

Embora estudadas e analisadas com cuidado, alguns comportamentos das medidas de quantificação de recorrência são desconhecidos por nós, ficando à cargo de novas experiências e trabalhos futuros.

Apêndice A

A.1 O que é uma variedade (*manifold*?)

Para começarmos, definiremos variedade estável e instável de estados estacionários e órbitas periódicas de um sistema dinâmico hipotético. A *variedade estável* de uma órbita periódica, ou um estado estacionário, pode ser definida como o conjunto de pontos, o qual representaremos por W^s , tal que, quando evoluídos no tempo, avançam em direção ao estado estacionário (γ), assemelhando-se a uma curva linear, E^s (vide figura A.1)

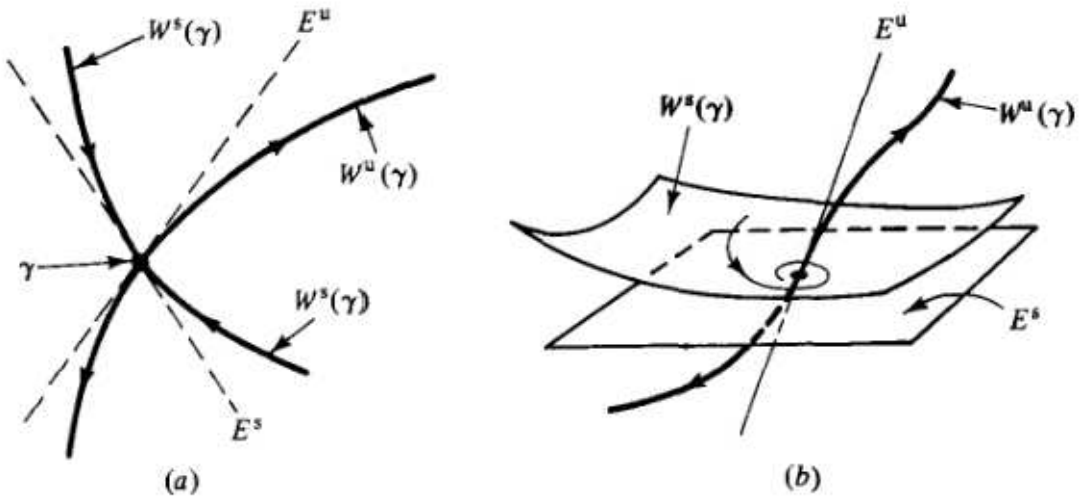


Figura A.1: (a) Representação uni-dimensional de variedade estável (W^s) e instável (W^u); (b) Representação bi-dimensional de manifold estável (W^s) e instável (W^u). Note que na vizinhança do estado assintótico γ tanto as variedades lineares (E) quanto as não-lineares (W) tornam-se idênticas. Ao passo que, a medida que se afastamos da vizinhança de γ a aproximação torna-se cada vez menos efetiva. Figura retirada da referência [1].

De forma semelhante, definimos a *variedade instável* como o conjunto de pontos, o qual representaremos agora por W^u , tal que, quando retrocedidos no tempo, avançam em

direção ao estado estacionário (γ), assemelhando-se a uma curva periódica linear, E^u (vide figura A.1). Considerando as aproximações acima, podemos em geral, tratar uma variedade como simplesmente um sub-espço, o qual assemelha-se muito ao espaço euclidiano. Veja um exemplo mais prático (figura A.2):

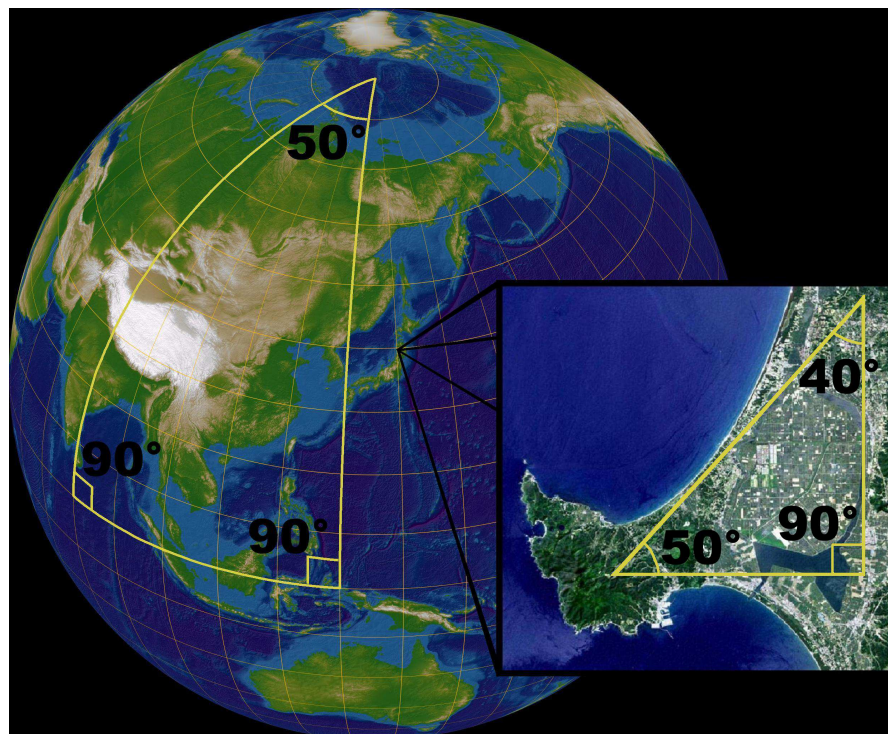


Figura A.2: Representação esférica do planeta Terra. Na primeira aproximação (triângulo grande) a soma dos ângulos internos do triângulo é igual à 230 graus, proporcionando uma aproximação muito ruim. Já no triângulo menor (aproximação local), a soma é igual à 180, proporcionando uma ótima aproximação.

Se olharmos a figura A.2 temos uma representação esférica do planeta Terra, o qual será o nosso espaço geométrico. Imagine então, que queiramos calcular os ângulos internos de um triângulo que envolva uma grande fatia dessa esfera, com um dos vértices no polo norte e os outros dois perto da linha do equador. Como o nosso espaço agora é curvo (diferente do espaço euclidiano) a soma dos ângulos internos desse triângulo, não é mais igual à 180 graus, e para efetuarmos esse cálculo precisaríamos utilizar trigonometria esférica. Contudo, mesmo que nosso espaço não seja plano, se fizermos uma ampliação de uma pequena região dessa esfera (triângulo menor na figura A.2), veremos que, localmente as leis da geometria euclidiana funcionam como boas aproximações.

Para o leitor que quiser saber mais, o livro *Chaos in Dynamical Systems*, Alligood et al., 1996 [2], fornece mais analogias sobre variedades. Este apêndice foi traduzido e adaptado do livro, *Dynamical Systems*, E. Ott, 2002 [1] em conjunto com algumas figuras do endereço

eletrônico <http://en.wikipedia.org/wiki/Manifold>.

Apêndice B

B.1 Dedução do Teorema de Cauchy-Schwarz

Antes de provarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, necessitamos da prova de um caso de ortogonalidade específico. Para isso, olhemos a figura B.1.

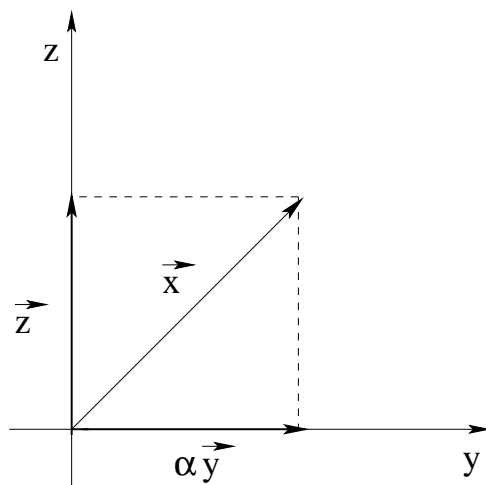


Figura B.1: Triângulo Retângulo.

Da álgebra, temos que a condição de ortogonalidade entre dois vetores ocorre quando o produto escalar entre eles é nulo. Como o sistema de coordenadas cartesianas é ortogonal por definição, podemos assumir que:

$$(z \cdot y) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Da figura B.1 podemos tirar que:

$$\vec{z} = \vec{x} - \alpha \vec{y} \quad (\text{B.2})$$

Substituído a equação B.2 em B.1, temos:

$$(z \cdot y) = (\vec{x} - \alpha \vec{y}) \cdot (y) = 0 \Rightarrow (x \cdot y) - \alpha |y|^2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

logo, se $\alpha = \frac{(x \cdot y)}{|y|^2}$, então:

$$(z \cdot y) = 0 \quad (\text{B.4})$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz é definida como:

$$|(x \cdot y)| \leq |x| \cdot |y| \quad (\text{B.5})$$

Para sua solução temos dois casos:

- Se $y = 0$ (solução trivial);
- Se $y \neq 0$.

Para $y \neq 0$ usaremos $\alpha = \frac{(x \cdot y)}{|y|^2}$ e assim, o caso de ortogonalidade $(z \cdot y) = 0$. Então:

$$|x|^2 = (z + \alpha y, z + \alpha y) = |z|^2 + \alpha^2 |y|^2 \quad (\text{B.6})$$

Com base na figura B.1, retiramos as seguintes suposições:

- Se $z = 0 \Rightarrow \vec{x} = \alpha \vec{y}$;
- Se $z \neq 0 \Rightarrow \vec{x} \geq \alpha \vec{y}$.

Logo, podemos supor de forma geral que:

$$|x|^2 \geq \alpha^2 \cdot |y|^2 \quad (\text{B.7})$$

Substituindo α na equação B.7, obtemos:

$$|x|^2 \geq \frac{(x \cdot y)^2}{|y|^4} \cdot |y|^2 \quad (\text{B.8})$$

Se fizermos algumas simplificações na equação B.8, obtemos então a desigualdade triangular de Cauchy-Schwarz:

$$|x| \cdot |y| \geq |(x \cdot y)| \quad (\text{B.9})$$

Apêndice C

C.1 Difeomorfismo e Homeomorfismo

Assuma que a função $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{y}$ estabeleça uma relação entre o conjunto \vec{x} e o conjunto \vec{y} :

$$\vec{h}(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n \end{cases}$$

Suponha que \vec{h} seja uma função injetora¹ e sobrejetora², ou seja, bijetora (ou bijetiva)³. Uma função com essas propriedades é invertível, isto é, existe a função inversa $h^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}$. Se \vec{h} é contínua, invertível e sua inversa h^{-1} é contínua, então \vec{h} é chamada de *homeomorfismo* (ou de isomorfismo topológico); e o domínio \vec{x} e a imagem \vec{y} são considerados homeomorficos (ou seja, possuem as mesmas propriedade topológicas). Um homeomorfismo é chamado de *Difeomorfismo* se $\vec{h}(\vec{x})$ e $\vec{h}^{-1}(\vec{y})$ são diferenciáveis em todos os pontos.

Por exemplo: a função $y = h(x) = x^2$ não é injetora para $x \in]-\infty, +\infty[$ (vide figura C.1), portanto, não representa um homeomorfismo. Entretanto, $y = h(x) = x^2$ é injetora para $x \in]0, \infty[$ e, para esse domínio, constitui um homeomorfismo, já que é também sobrejetora e tem inversa $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$ contínua (vide figura C.2). A função $h(x) = x^3$ é um homeomorfismo para $x \in]-\infty, +\infty[$, mas não é um difeomorfismo, pois sua inversa não é diferenciável na origem. (*Fonte: Sistemas Dinâmicos, L. H. A. Monteiro, 2ª Ed. 2006*).

¹Cada elemento \vec{y} é imagem de um único elemento do domínio \vec{x} . Assim, se $\vec{y}_a = \vec{h}(\vec{x}_a)$ e $\vec{y}_b = \vec{h}(\vec{x}_b)$, então para $\vec{x}_a \neq \vec{x}_b$, tem-se que $\vec{y}_a \neq \vec{y}_b$. Em inglês, essa função é chamada de “one-to-one”.

²Não existe elemento de \vec{y} que não seja imagem de pelo menos um elemento do domínio de \vec{x} . Em inglês, essa função é chamada “onto”.

³Uma função bijetora é simultaneamente injetora e sobrejetora

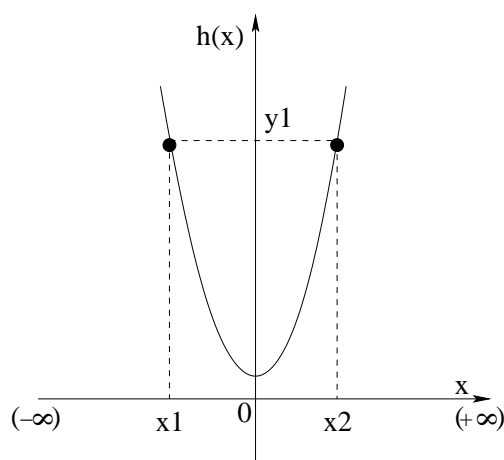


Figura C.1: Gráfico da função $h(x) = y = x^2$ para o domínio de $x \in]-\infty, +\infty[$. Note que um único y pode mapear dois valores possíveis de x , o que não satisfaz a condição de função injetora.

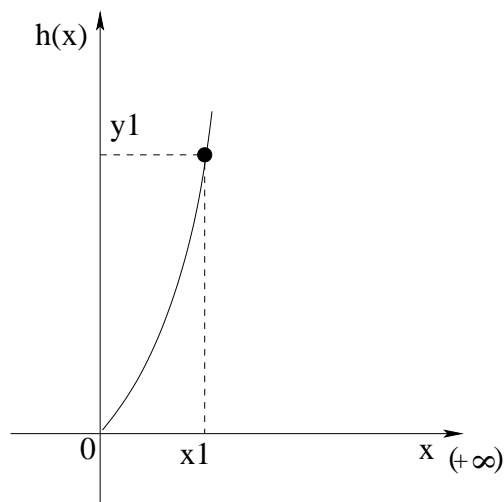


Figura C.2: Gráfico da função $h(x) = y = x^2$ para o domínio de $x \in]0, +\infty[$. Nesse caso, apenas um único valor de y mapeia valores possíveis de x , satisfazendo a condição de função injetora. Como não existe elemento de y que não seja imagem de pelo menos um valor do domínio de x , logo, a função também é sobrejetora, com isso, garantimos a invertibilidade da função $h(x)$.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 2^a Ed, 1993.
- [2] K. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Springer Verlag, 1996.
- [3] S. Wiggins and A. Heck. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer Verlag, 2003.
- [4] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, 2^a Ed., 2006.
- [5] J. C. Sommerer. The end of classical determinism. *Johns Hopkins Apl Technical Digest*, pages 333–347, 1995.
- [6] J .P. Eckmann, S.O. Kamphorst, and D.Ruelle. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhys. Lett.*, **56**(5):973–977, 1987.
- [7] R. M. May. Mapa logístico. *Nature*, **261**:459, 1976.
- [8] G. T. Kubo. Variabilidade da dimensão instável no rotor duplo pulsado. Master’s thesis, Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2007.
- [9] H. Whitney. Differentiable manifold. *Annals of Mathematics*, **37**:645–680, 1936.
- [10] H. Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Am. Math. Soc.*, **36**:63–89, 1934.
- [11] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [12] F. Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*. Springer-Verlag, 1981.
- [13] T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli. Embedology. *Journal Statistical Physics*, **65**:579–616, 1991.
- [14] E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke. *Coping with chaos*. John Wiley e Sons, Inc., 1994.

- [15] H. Poincaré. Sur la probleme des trois et les équation de la dynamique. *Acta Mathematica*, **13**:1–271, 1997.
- [16] E. G. Altmann. *Tempo de Retorno em Sistemas Dinâmicos*. PhD thesis, Universidade do Estado de São Paulo, USP, 2004.
- [17] N. Marwan. *Encounters with Neighbours*. PhD thesis, Universität Potsdam, 2003.
- [18] J. A. Holyst, M. Zebrowska, and K. Urbanowicz. Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy? *The European Physical Journal B*, **20**:531–535, 2000.
- [19] N. Marwan and J. Kurths. Line structure in recurrence plots. *Physics Letters A*, **336**:349–357, 2004.
- [20] J. Gao and H. Cai. On the structures and quantification of recurrence plots. *Physics Letters A*, **270**:75–87, 2000.
- [21] T. K. March, S. C. Chapman, and R. O. Dendy. Recurrence plot statistics and the effects of embedding. *Physica D*, **200**:171–184, 2004.
- [22] F. B. Kennel, R. Brown, and H. D. I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using geometrical construction. *Physics Review A*, **45**:3403, 1992.
- [23] R. Hegger and H. Kantz. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *Chaos*, **33**:235–243, 1998.
- [24] J. S. Iwanski and E. Bradley. Recurrence plots of experimental data: To embed or not embed? *Chaos*, **8**(4):861–871, 1998.
- [25] A. M. Fraser and H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractor from mutual information. *Physics Review A*, **33**:1134, 1986.
- [26] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The bell system technical journal*, **27**:379–423, 1948.
- [27] E. L. Lima. *Um curso de análise, volume 2*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1985.
- [28] N. Marwan, M.C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, **438**:237–329, 2007.

- [29] C. Webber and J. Zbilut. Dynamical assesment of physiological systems and states using recurrence plots strategies. *J. Appl. Physiol.*, **76**:965–973, 1994.
- [30] M. Thiel, M. C. Romano, P. L. Read, and J. Kurths. Estimation of dynamical invariants without embedding by recurrence plots. *Chaos*, **14**:234, 2004.
- [31] J. B. Gao. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications. *Physical Review Letters*, **83**(16):3178–3181, 1999.
- [32] J. B. Gao, Y. Cao, J. G. Harris L. Gu, and J. C. Principe. Detection of weak transitions in signal dynamics using recurrence time statistics. *Physics Letters A*, **317**:64–72, 2003.
- [33] N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, and J. Kurths. Recurrence-plot-based measures of complexity and their aplication to heart-rate-variability data. *Physical Review E*, **66**(2):26702–1,26702–8, 2002.
- [34] J. A. Holyst, M. Zebrowska, and K. Urbanowicz. Observation of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy? *The European Physical Journal B*, **20**:531–535, 2001.
- [35] N. Thomasson, T. Hoepfner, C. L. Webber Jr., and J. P. Zbilut. Recurrence quantification in epileptic eegs. *Physics Letters A*, **279**:94–101, 2001.
- [36] M. Bianciardini, P. Sirabella, G. E. Hagberg, A. Giuliani, J. P. Zbilut, and A. Colosimo. Model-free analysis of brain fmri data by recurrence quantification. *NeuroImage*, **37**:489–503, 2007.
- [37] H. Castellini and L. Romanelli. Application of recurrence quantified analysis to study the dynamics of chaotic chemical reactions. *Physica A*, **342**:301–307, 2004.
- [38] Recurrence quantification analysis of surface emg detects changes in motor unit synchronization induced by recurrent inhibition. *Experimental brain research*, **178**:308–315, 2007.
- [39] T. Schreiber. Interdisciplinary application of nonlinear time series. *Chaos*, **370**:446–448, 1994.
- [40] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, **7**:520–524, 1997.

- [41] C. F. Woellner. Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas hamiltonianos acoplados. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2006.
- [42] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Lyapunov exponent. *Physica D*, **16**:285, 1984.
- [43] M. Carmen Romano Blasco. *Synchronization Analysis by Means of Recurrences in Phase Space*. PhD thesis, Universität Potsdam, 2004.
- [44] J. P. Crutchfield and K. Kaneko. *Phenomenology of spatiotemporal chaos*, Ed. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore. in: Directions in Chaos, Vol. 1, 1987.
- [45] A. M. Batista. Mapas acoplados na rede e sincronização. Master's thesis, Universidade Federal do Paraná - UFPR, 1996.
- [46] A. M. Batista, S. E. de S. Pinto, R. L. Viana, and S. R. Lopes. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power law lattices. *Physical Review E*, 65:56209, 2002.
- [47] T. Matsumoto. A chaotic attractor from chuas's circuit. *IEEE Trans. CAS-31*, pages 1055–1058, 1984.
- [48] T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro. The double scroll. *IEEE Trans. CAS-32*, pages 798–818, 1985.
- [49] V. S. Anishchenko and T. Kapitaniak. Birth of double-double scroll attrator in coupled chua circuits. *Physics Letters A*, pages 207–214, 1994.